Théorie Financière Approfondie

Jean-Michel Courtault

Université de Paris-Nord

Théorie Financière Approfondie

Jean-Michel COURTAULT
Septembre 2008

Master « Modélisation de l'économie et de la finance internationales » 2ème année

"Ma tête est une tirelire
Où je mets tous les jours du soleil"
(Pierre ALBERT-BIROT, La joie des sept couleurs, 1919, Editions Sic)

Chapitre 1: Théorie de l'arbitrage : Le cas d'une période et d'un nombre fini d'états de la nature[1]

Bibliographie:

Michael ALLINGHAM, *Arbitrage: Elements of financial economics*. Basingstoke: Macmillan, 1991
Stanley PLISKA, *Introduction to mathematical finance: discrete time models*, Malden (Mass.): Blackwell, 1997. (**Ouvrage de référence pour le cours**)
Patrick ROGER, *L'évaluation des actifs financiers*, De Boeck, 1996.

En 1974, sortait un film de Michel Audiard intitulé « Comment réussir... quand on est con, moche et pleurnichard ». Mon programme n'est pas aussi ambitieux mais je peux montrer qu'avec l'aide de la Finance Mathématique il est possible de s'enrichir (au moins intellectuellement) même si on a pas d'argent et si on ne souhaite pas prendre de risque.

I. Le modèle : Notation et concepts primitifs

* 2 dates, t=0 et t=1. L'échange est possible à chacune de ces dates.
* Un ensemble fini d'états de la nature :
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_K\}$
* Une mesure de probabilité[2] $P : \Omega \to [0,1]$. P est telle que $\forall \omega \in \Omega,\ P(\omega) > 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$. Ceci signifie que chaque état de la nature est possible et que les anticipations des agents sont homogènes[3].
* Un compte bancaire $B = \{B_t : t = 0,1\}$ où le processus B est tel que B_t est le prix exprimé en termes de l'unité de compte (par exemple l'Euro, le Franc ou le Dollar etc.) en t d'une unité de compte bancaire. On suppose que $B_0 = 1$ et B_1 est une variable aléatoire c-à-d $B_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall \omega \in \Omega,\ B_1(\omega) > 0$. B_1 est la valeur en t=1 d'un compte bancaire où l'on a déposé 1 Euro en t=0.
  On considère que le compte bancaire est sans risque[4] dans la mesure où 1 Euro investi en t = 0 vaudra toujours quelque chose en t = 1.

[1] Je remercie Bertrand CRETTEZ, Naïla HAYEK et Christophe STRICKER pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la rédaction de ce cours.
[2] Il ne s'agit pas à proprement parler d'une mesure de probabilité. Cependant, on peut construire à partir du vecteur $(P(\omega_1), \ldots, P(\omega_K))$ la mesure de probabilité $\mathcal{P}: 2^\Omega \to [0, 1]$ définie par $\mathcal{P}(A) \equiv \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ où A est une partie (c-à-d un événement) quelconque de 2^Ω. En particulier $\mathcal{P}(\{\omega\}) \equiv P(\omega)$.
[3] Pour la plupart des résultats du cours (sauf pour les résultats concernant le C.A.P.M.) cette hypothèse est plus forte qu'il n'est nécessaire. Il suffit que l'homogénéité des anticipations porte non sur les probabilités des différents états de la nature mais sur leur possibilité : en d'autres termes les agents sont d'accord sur la possibilité d'occurrence éventuelle d'un état de la nature quelconque mais pas nécessairement sur sa probabilité.
[4] Il serait plus judicieux de parler d'actif numéraire plutôt que d'actif sans risque dans la mesure où dans les exemples numériques que nous envisagerons le prix des actifs risqués sont eux aussi toujours strictement positifs

* Le processus des prix des actifs financiers risqués $S = \{S_t : t = 0,1\}$ où $S_t = (S_1(t), S_2(t), ..., S_N(t))$. $S_n(t)$ est le prix à l'instant t exprimé en termes de l'unité de compte de l'actif risqué n.
  Le prix à l'instant t=0 $S_n(0)$ de ces actifs est strictement positif et connu des investisseurs, alors que le prix en t=1 est une variable aléatoire positive ou nulle[5] dont la réalisation est connue des investisseurs en t=1 : $S_n(1) : \Omega \to \mathbb{R}$.
* Un ensemble de choix des portefeuilles $\mathcal{H} \equiv \mathbb{R}^{N+1}$. $\mathcal{H}$ représente l'ensemble des choix institutionnellement possibles. Ceci revient à dire qu'il est possible de vendre à découvert ou d'emprunter autant qu'on voudra et qu'aucune restriction quant à la solvabilité des agents n'est imposée.
* Un portefeuille $H = (H_0, H_1, ..., H_N)$ est un vecteur de $\mathcal{H} \equiv \mathbb{R}^{N+1}$ donnant la quantité de chaque actif détenu de t = 0 à t = 1 par un investisseur.
  H_n est le nombre d'unités d'actif n détenu entre t=0 et t=1. Si $H_n < 0$ alors l'actif n est vendu à découvert (si n est un actif risqué) ou bien il s'agit d'un emprunt (si n désigne le compte-bancaire). Si $H_n > 0$ alors il s'agit d'un achat. H_0 est aussi le nombre d'Euros investis dans le compte bancaire puisque le prix unitaire de chaque unité de compte bancaire est égal à un Euro en t = 0.
* Un droit conditionnel est une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $X(\omega) > 0$ est une recette et $X(\omega) < 0$ une dépense.

II. Comment peut-on, lorsque l'on est peureux et fauché, s'en mettre plein les poches ?

L'objet de la présente section est d'identifier toutes les situations dans lesquelles il est possible de s'en mettre plein les poches, sans aucun risque et sans aucune mise de fonds.

1) Valorisation, Gain d'un portefeuille et Actualisation

On peut vérifier que tous les concepts définis ci-dessous peuvent être énoncés en terme des concepts primitifs décrits dans la section précédente. C'est en quoi ce sont des concepts dérivés : ils sont dérivés des concepts primitifs.

<u>Définition</u>

Le processus de valorisation $V = \{V_t : t = 0,1\}$ décrit la valeur totale (exprimée en termes de l'unité de compte) du portefeuille à chaque date: $V_t \equiv H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t) \quad t = 0,1$

Notons que V_t dépend du choix de portefeuille H et que V_1 est une variable aléatoire.

à toutes les dates et dans tous les états de la nature de telle sorte que, si on suit la définition de PLISKA, tous les actifs financiers, y compris les actifs risqués, sont sans risque…

[5] Ceci revient à supposer la responsabilité limitée des investisseurs. Cette hypothèse traditionnelle en Finance n'est absolument pas indispensable pour la suite des raisonnements. En l'absence d'opportunité d'arbitrage on peut montrer qu'elle implique $S_n(0) > 0$.

Définition

Le processus de gain G est une variable aléatoire qui décrit le profit total ou la perte (exprimée en termes de l'unité de compte) générée par le portefeuille entre les dates 0 et 1 :

$$G \equiv H_0\left(B_1 - B_0\right) + \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n$$

où $\Delta S_n \equiv S_n(1) - S_n(0)$ est le gain d'un investissement d'une unité dans l'actif n.

Proposition 1 :

$V_1 = V_0 + G$

Démonstration:

Par définition, $V_0 + G \equiv \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \right) + \left(H_0\left(B_1 - B_0\right) + \sum_{n=1}^{N} H_n \left(S_n(1) - S_n(0)\right) \right)$

$$= H_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) \equiv V_1$$

La proposition 1 nous dit que toute variation de la valeur du portefeuille, $V_1 - V_0$, doit être due à une perte ou un gain généré par le portefeuille et non à l'addition de fonds d'une source extérieure (revenu du travail par exemple) ou une diminution due à la consommation. Il n'y a donc pas d'épargne ni de désépargne.

La notion de bien numéraire.
Supposons qu'on ait un panier de fruits composés de 2 Pommes, 3 Oranges et 4 Poires.
Supposons qu'une Pomme vaille 3 euros, une Orange 6 euros et une Poire 1,5 euro.
La valeur du panier de fruits en euros est :
2 x 3 + 3 x 6 + 4 x 1,5 = 30 euros
Si on prend la Poire comme numéraire on peut calculer la valeur du panier de fruits en poires c-à-d compter le nombre de poires équivalent aux fruits dans le panier. Une Pommes valant 3 euros et une Poire 1,5 euro on en déduit qu'une pomme équivaut à 2 poires et comme il y a 2 Pommes dans le panier de fruit on peut considérer que c'est équivalent à 2 x 2 = 4 Poires. De même le prix d'une Orange est 6 euros et celui d'une Poire 1.5 euro. On peut donc considérer qu'une Orange équivaut à 4 poires et comme il y a 3 oranges dans le panier de fruits on peut considérer que cela équivaut à 3 x 4 = 12. Il y a donc en tout dans le panier de fruits un nombre de poires équivalent à :
2 x 2 + 3 x 4 + 4 x 1 = 20 poires
Si maintenant le prix d'une Pomme passe à 6 euros, celui d'une Orange à 4 euros et celui d'une poire à 2 euros alors le prix du panier de fruits passe de 30 euros à :
2 x 6 + 3 x 4 + 4 x 2 = 32 euros
Le prix du panier de fruits en terme des poires passe de 20 poires à :
2 x 3 + 3 x 2 + 4 x 1 = 16 poires
L'augmentation de la valeur en euros s'explique par la variation des prix nominaux de chaque fruit :
2 x (6-3) + 3 x (4-6) + 4 x (2-1.5) = 2 = 32 – 30
La diminution de la valeur en poires du panier de fruits s'explique par la variation des prix relatifs de chaque fruit :
2 x (3-2) + 3 x (2-4) + 4 x (1-1) = -4 = 16 – 20

Appliquons maintenant ces notions aux actifs financiers et prenons comme numéraire le compte bancaire. C'est évidemment possible dans la mesure où nous avons supposé que le prix d'une unité de compte bancaire était toujours strictement positif. Il est donc toujours possible de calculer le prix relatif d'un actif financier quelconque en terme du compte bancaire.

Définition :

Le processus de prix (des actifs risqués) actualisés $S^* = \left\{S_t^* : t = 0,1\right\}$ est tel que $S_t^* = \left(S_1^*(t),...,S_N^*(t)\right)$ et $S_n^*(t) \equiv S_n(t)/B_t$ où n = 1, …, N et t = 0, 1. $S_n^*(t)$ est parfaitement défini car $B_t > 0$ pour tout t = 0, 1.

Chaque unité d'actif risqué équivaut à $S_n^*(t)$ unités de compte-bancaire car $S_n^*(t)$ est le nombre d'unités de compte-bancaire que l'on peut échanger contre une unité d'actif risqué. En effet, la vente à l'instant t d'une unité d'actif risqué rapporte $S_n(t)$ unités de compte (par exemple l'Euro) ce qui permet d'acheter en t $S_n(t)/B_t$ unités de compte-bancaire.

Définition :

Le processus de valorisation actualisée $V^* = \left\{V_t^* : t = 0,1\right\}$ est tel que $V_t^* \equiv H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$ où t = 0, 1.

Ici V_t^* est la valeur du portefeuille exprimée en terme du numéraire. Ceci revient à compter le nombre d'unités de compte-bancaire équivalentes détenues en portefeuille. Tout d'abord il y a H_0 unités de compte bancaire. Ensuite, chaque unité d'actif risqué n équivaut à $S_n^*(t)$ unités de compte-bancaire : par conséquent, H_n unités d'actif risqué n sont équivalentes à $H_n \times S_n^*(t)$ unités de compte-bancaire.

Définition :

Le processus de gains actualisés G^* est donné par $G^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*$ où $\Delta S_n^* \equiv S_n^*(1) - S_n^*(0)$.

G* nous donne le nombre d'unités de compte-bancaire rapporté par le portefeuille. Tout d'abord le compte bancaire ne rapporte aucune unité de compte-bancaire : il y a dans le portefeuille autant d'unités de compte-bancaire en t = 0 qu'en t = 1 soit H_0. Ensuite, chaque unité d'actif risqué n rapporte ΔS_n^* unités de compte-bancaire. En effet, une unité d'actif risqué n équivaut à $S_n^*(1)$ unités de compte bancaire en t = 1 alors qu'elle n'équivalait qu'à $S_n^*(0)$ unités de compte bancaire en t = 0 : on peut donc considérer que chaque unité d'actif risqué n rapporte $S_n^*(1) - S_n^*(0) \equiv \Delta S_n^*$ unités de compte bancaire.

Proposition 2 :

$V_t^* = V_t/B_t \quad t = 0,1$

Démonstration:

Par définition, $V_t^* \equiv H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(t)$

$$\equiv H_0 \left({B_t}/{B_t} \right) + \sum_{n=1}^{N} H_n \left(S_n(t)/B_t \right)$$

$$= \frac{H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t)}{B_t} \equiv \frac{V_t}{B_t}$$

Proposition 3 :

$V_1^* = V_0^* + G^*$

Démonstration

Par définition, $V_0^* + G^* \equiv \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) \right) + \left(\sum_{n=1}^{N} H_n \left(S_n^*(1) - S_n^*(0) \right) \right)$

$$= \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1) \right) \equiv V_1^*$$

Exemple 1 :

Supposons $K = 2$, $N = 1$, $B_1 = 10/9$ dans tous les états de la nature.

		t = 1	
	t = 0	ω_1	ω_2
S_t	$S_0 = 5$	$S_1(\omega_1) = 20/3$	$S_1(\omega_2) = 40/9$
B_t	$B_0 = 1$	$B_1(\omega_1) = 10/9$	$B_1(\omega_2) = 10/9$
S_t^*	$S_0^* = 5$	$S_1^*(\omega_1) = 6$	$S_1^*(\omega_2) = 4$

Soit un portefeuille $H = (H_0, H_1)$. On détermine les grandeurs suivantes :

$V_0 \equiv H_0 + 5H_1$

$V_0^* \equiv H_0 + 5H_1$

$V_1 \equiv \frac{10}{9} H_0 + H_1 S_1$

$G \equiv \frac{1}{9} H_0 + H_1 (S_1 - 5)$

$V_1^* \equiv H_0 + H_1 S_1^*$

$G^* \equiv H_1 (S_1^* - 5)$

		t = 1	
	t = 0	ω_1	ω_2
V_t	$V_0 = H_0 + 5H_1$	$V_1(\omega_1) = \dfrac{10}{9}H_0 + \dfrac{20}{3}H_1$	$V_1(\omega_2) = \dfrac{10}{9}H_0 + \dfrac{40}{9}H_1$
V_t^*	$V_0^* = H_0 + 5H_1$	$V_1^*(\omega_1) = H_0 + 6H_1$	$V_1^*(\omega_2) = H_0 + 4H_1$
G		$G(\omega_1) = \dfrac{1}{9}H_0 + \dfrac{5}{3}H_1$	$G(\omega_2) = \dfrac{1}{9}H_0 - \dfrac{5}{9}H_1$
G^*		$G^*(\omega_1) = H_1$	$G^*(\omega_2) = -H_1$

On peut aisément vérifier les propositions 1 à 3 :

$$V_1 - V_0 \equiv \left(\frac{10}{9}H_0 + H_1S_1\right) - \left(H_0 + 5H_1\right)$$
$$= \frac{1}{9}H_0 + H_1\left(S_1 - 5\right) \equiv G$$

$$\frac{V_0}{B_0} \equiv \frac{H_0 + 5H_1}{1} = H_0 + 5H_1 \equiv V_0^*$$

$$\frac{V_1}{B_1} \equiv \frac{\frac{10}{9}H_0 + H_1S_1}{\frac{10}{9}} = H_0 + H_1S_1^* \equiv V_1^*$$

$$V_1^* - V_0^* \equiv \left(H_0 + H_1S_1^*\right) - \left(H_0 + 5H_1\right)$$
$$= H_1\left(S_1^* - 5\right) \equiv G^*$$

Notons également que $G^*(\omega) \neq \dfrac{G(\omega)}{B_1(\omega)}$. Par exemple, pour H = (1, 0) on a G* = 0 alors que G = 1/9.

2) Arbitrage, Dominance et loi du prix unique

Nous allons définir plusieurs concepts qui permettent d'identifier des situations où l'investisseur peut gagner de l'argent sans risque et sans mise de fonds. Nous établirons des relations entre ces notions. Nous allons montrer en particulier que l'absence d'opportunité d'arbitrage entraîne qu'il n'y a pas de portefeuille dominant et qu'en l'absence de portefeuille dominant la loi du prix unique est vérifiée.

Définition:

On dit que la loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il n'existe pas deux portefeuilles $\hat{H}$ et $\tilde{H}$ tels que :

$$\forall\omega\in\Omega,\ \hat{V}_1(\omega)=\tilde{V}_1(\omega)$$
$$\hat{V}_0\neq\tilde{V}_0$$

Ceci signifie que deux portefeuilles identiques (c'est-à-dire rapportant la même chose dans tous les états de la nature) doivent coûter la même chose. Notons que s'il existe un seul actif financier, la loi du prix unique n'est pas nécessairement vérifiée. Par exemple, si l'actif ne rapporte rien mais coûte quelque chose. Bien qu'il n'y ait qu'un seul actif on peut composer (au moins) deux portefeuilles différents. Un portefeuille composé d'une unité de l'actif et un portefeuille composé d'aucune unité de l'actif. Les deux portefeuilles ne valent rien en t = 1 mais ne coûte pas la même chose en t = 0.

Proposition 4:

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il n'existe pas de portefeuille $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $V_0 \neq 0$ et $V_1 = 0$.

Démonstration :

$\Rightarrow$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ que $V_0 \neq 0$ et $V_1 = 0$. On veut montrer une contradiction. Il existe H, H'$\equiv$ 0 tels que $V_1=\mathbf{0}=V_1'$ et $V_0\neq V_0'=0$: la contradiction recherchée.

$\Leftarrow$ Démontrons la contraposée et supposons qu'il existe H, H' tels que $V_1=V_1'$ et $V_0\neq V_0'$.

On veut montrer qu'il existe $\hat{H}$ tel que $\hat{V}_0\neq 0$ et $\hat{V}_1=0$.

Posons $\hat{H}\equiv H-H'$ alors $\hat{V}_0=V_0-V_0'\neq 0$ et $\hat{V}_1=V_1-V_1'=0$ ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 5:

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il n'existe pas de portefeuille $H \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $V_0^*\neq 0$ et $V_1^*(\omega)=0\ \forall\omega\in\Omega$.

Démonstration :

A faire à la maison.

Exemple 2:

Dans cet exemple, la loi du prix unique est vérifiée :

		t = 1	
	t = 0	ω_1	ω_2
B_t	1	2	2
$S_1(t)$	10	12	8
V_t	$H_0 + 10\,H_1$	$2\,H_0 + 12\,H_1$	$2\,H_0 + 8\,H_1$

$$\begin{cases} 2H_0 + 12H_1 = 0 \\ 2H_0 + 8H_1 = 0 \end{cases}$$

Une solution unique H = (0, 0). On a $V_0 = 0$.

Dans cet exemple, la loi du prix unique n'est pas vérifiée :

		t = 1		
	t = 0	ω_1	ω_2	ω_3
B_t	1	1	1	2
$S_1(t)$	10	8	12	20
$S_2(t)$	5	12	8	20
V_t	$H_0 + 10\,H_1 + 5\,H_2$	$H_0 + 8\,H_1 + 12\,H_2$	$H_0 + 12\,H_1 + 8\,H_2$	$2\,H_0 + 20\,H_1 + 20\,H_2$

$$\begin{cases} H_0 + 8H_1 + 12H_2 = 0 \\ H_0 + 12H_1 + 8H_2 = 0 \\ 2H_0 + 20H_1 + 20H_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4H_1 - 4H_2 = 0 \\ 2H_0 + 20H_1 + 20H_2 = 0 \end{cases}$$

$H = (-20\,\lambda, \lambda, \lambda)$ est solution et $V_0 = -20\,\lambda + 10\,\lambda + 5\,\lambda = -5\,\lambda \neq 0$.

Définition :

On dit que le portefeuille $\hat{H}$ domine $\tilde{H}$ si et seulement si $\hat{V}_0 = \tilde{V}_0$ et $\hat{V}_1(\omega) > \tilde{V}_1(\omega) \forall\omega \in \Omega$.

Proposition 6:

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe un portefeuille dominant.

(ii) Il existe un portefeuille H tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$.

(iii) Il existe un portefeuille H tel que $V_0 < 0$ et $V_1(\omega) \geq 0 \ \forall\omega \in \Omega$.

(iv) Il existe un portefeuille H tel que $\forall\omega \in \Omega, G(\omega) > 0$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\hat{H}$ domine $\tilde{H}$. On veut montrer qu'il existe H tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$.

Il suffit de poser $H \equiv \hat{H} - \tilde{H} = \left(\hat{H}_0 - \tilde{H}_0, \hat{H}_1 - \tilde{H}_1, ..., \hat{H}_N - \tilde{H}_N\right)$. Par définition:

$$\begin{aligned} V_t &= \left(\hat{H}_0 - \tilde{H}_0\right)B_t + \sum_{n=1}^{N}\left(\hat{H}_n - \tilde{H}_n\right)S_n(t) \\ &= \left[\hat{H}_0 B_t + \sum_{n=1}^{N}\hat{H}_n S_n(t)\right] - \left[\tilde{H}_0 B_t + \sum_{n=1}^{N}\tilde{H}_n S_n(t)\right] \\ &= \hat{V}_t - \tilde{V}_t \end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $\hat{H}$ domine $\tilde{H}$, on a donc $V_0 = \hat{V}_0 - \tilde{V}_0 = 0$ et $V_1(\omega) = \hat{V}_1(\omega) - \tilde{V}_1(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$ ce que l'on voulait démontrer.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons qu'il existe un portefeuille H tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$. On veut montrer qu'il existe un portefeuille $\overline{H}$ tel que $\overline{V}_0 < 0$ et $\overline{V}_1(\omega) \geq 0 \ \forall\omega \in \Omega$.

Soit $J \equiv \min_{\omega\in\Omega} \frac{V_1(\omega)}{B_1(\omega)} > 0$. On sait que J existe car Ω est un ensemble fini et que $B_1(\omega) > 0$.

Posons $\overline{H}_0 \equiv H_0 - J$

$\overline{H}_n \equiv H_n$ pour n = 1, …, N

Le coût initial du portefeuille $\overline{H}$ est donc tel que:

$$\begin{aligned}\bar{V}_0 &\equiv \bar{H}_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} \bar{H}_n\, S_n(0)\\ &= (H_0 - J) B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n\, S_n(0)\\ &= \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n\, S_n(0) \right) - JB_0\\ &= V_0 - JB_0 = 0 - JB_0 < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(\omega) &\equiv \bar{H}_0 B_1(\omega) + \sum_{n=1}^{N} \bar{H}_n S_n(1)(\omega)\\ &= (H_0 - J) B_1(\omega) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1)(\omega)\\ &= \left(H_0 B_1(\omega) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1)(\omega) \right) - JB_1(\omega)\\ &= V_1(\omega) - JB_1(\omega)\\ &= \left(\frac{V_1(\omega)}{B_1(\omega)} - J \right) B_1(\omega) \geq 0\end{aligned}$$

On a trouvé un portefeuille $\bar{H}$ tel que $\bar{V}_0 < 0$ et $\bar{V}_1(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$ ce que l'on voulait démontrer.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons qu’il existe un portefeuille H tel que $V_0 < 0$ et $V_1(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$. On veut montrer qu’il existe un portefeuille H’ tel que $\forall \omega \in \Omega, G'(\omega) > 0$

Posons H’ $\equiv$ H

$$\begin{aligned}G' &\equiv H'_0 (B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^{N} H'_n \Delta S_n\\ &= H_0 (B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^{N} H_n \left(S_n(1) - S_n(0) \right)\\ &= \left(H_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) \right) - \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \right)\\ &= V_1 - V_0 > 0\end{aligned}$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe H tel que $\forall \omega \in \Omega, G(\omega) > 0$. On veut montrer qu'il existe un portefeuille dominant.

Soit H' tel que:

$$H'_0 \equiv H_0 - \frac{V_0}{B_0}$$

$H'_n \equiv H_n$

Le coût du portefeuille H' est donné par

$$\begin{aligned}
V'_0 &\equiv H'_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H'_n S_n(0) \\
&= \left(H_0 - \frac{V_0}{B_0} \right) B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \\
&= \left(-\frac{V_0}{B_0} \right) B_0 + \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \right) \\
&= -V_0 + V_0 = 0
\end{aligned}$$

Le gain du portefeuille H' exprimé en terme du numéraire est le même que celui du portefeuille H puisque les portefeuilles H et H' ont la même composition d'actifs risqués : $G'^*(\omega) = G^*(\omega)$. Par conséquent le paiement du portefeuille H' exprimé en terme du numéraire est donné par:

$$\begin{aligned}
V_1'^*(\omega) &\equiv V_0'^* + G'^*(\omega) \\
&= \frac{V'_0}{B_0} + G^*(\omega)
\end{aligned}$$

$$\frac{V'_1(\omega)}{B_1(\omega)} = 0 + G^*(\omega)$$

D’où

$$V'_1(\omega) = B_1(\omega) \times G^*(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$$

On a donc trouvé un portefeuille H' tel que

$$V'_0 = 0 \text{ et } \forall \omega \in \Omega, V'_1(\omega) > 0$$

On en déduit que H’ domine le portefeuille **0** = (0, 0, …, 0) ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 7: Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe un portefeuille dominant.

(ii) Il existe un portefeuille H tel que $V_0^* = 0$ et $V_1^*(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$.

(iii) Il existe un portefeuille H tel que $V_0^* < 0$ et $V_1^*(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$.

(iv) Il existe un portefeuille H tel que $\forall \omega \in \Omega, G^*(\omega) > 0$.

Démonstration:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\hat{H}$ domine $\tilde{H}$. On veut montrer qu'il existe H tel que $V_0^* = 0$ et $V_1^*(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$.

D'après la proposition 5 on sait qu'il existe H tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$. D'autre part d'après la proposition 2 on sait que $V_t^* = V_t / B_t \quad t = 0,1$ et puisque B_t > 0, H est tel que $V_0^* = 0$ et $V_1^*(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$ ce que l'on voulait démontrer.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons qu'il existe un portefeuille H tel que $V_0^* = 0$ et $V_1^*(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$. On veut montrer qu'il existe un portefeuille $\overline{H}$ tel que $\overline{V}_0^* < 0$ et $\overline{V}_1^*(\omega) \geq 0 \quad \forall\omega \in \Omega$.

D'après la proposition 2 on sait que $V_t^* = V_t / B_t \quad t = 0,1$ et puisque B_t > 0, H est donc tel que $V_0 = 0$ et $V_1(\omega) > 0 \ \forall\omega \in \Omega$. D'après la proposition 5 on en déduit qu'il existe $\overline{H}$ tel que $\overline{V}_0 < 0$ et $\overline{V}_1(\omega) \geq 0 \ \forall\omega \in \Omega$. La proposition 2 nous permet de conclure, sachant que B_t > 0, que $\overline{H}$ est tel que $\overline{V}_0^* < 0$ et $\overline{V}_1^*(\omega) \geq 0 \quad \forall\omega \in \Omega$ ce que l'on voulait démontrer.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons qu'il existe un portefeuille H tel que $V_0^* < 0$ et $V_1^*(\omega) \geq 0 \quad \forall\omega \in \Omega$.

On veut montrer qu'il existe un portefeuille H' tel que $\forall\omega \in \Omega, G'^*(\omega) > 0$

Posons $H'_n \equiv H_n$

$$
\begin{aligned}
G'^* &\equiv \sum_{n=1}^{N} H'_n \Delta S_n^* \\
&= \sum_{n=1}^{N} H_n \left(S_n^*(1) - S_n^*(0)\right) \\
&= \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1)\right) - \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n^* S_n(0)\right) \\
&= V_1^* - V_0^* > 0
\end{aligned}
$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe H tel que $\forall\omega \in \Omega, G^*(\omega) > 0$. On veut montrer qu'il existe un portefeuille dominant.

Soit H' tel que:

$H'_0 \equiv H_0 - V_0^*$

$H'_n \equiv H_n$

Le coût du portefeuille H' est donné par

$$
\begin{aligned}
V_0'^{*} &\equiv H_0' + \sum_{n=1}^{N} H_n' S_n^{*}(0) \\
&= \left(H_0 - V_0^{*}\right) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^{*}(0) \\
&= -V_0^{*} + \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^{*}(0)\right) \\
&= -V_0^{*} + V_0^{*} = 0
\end{aligned}
$$

Le gain du portefeuille H' exprimé en terme du numéraire est le même que celui du portefeuille H puisque les portefeuilles H et H' ont la même composition d'actifs risqués : $G'^{*}(\omega) = G^{*}(\omega)$. Par conséquent le paiement du portefeuille H' exprimé en terme du numéraire est donné par:

$$
\begin{aligned}
V_1'^{*}(\omega) &\equiv V_0'^{*} + G'^{*}(\omega) \\
&= G^{*}(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega
\end{aligned}
$$

On a donc trouvé un portefeuille H' tel que

$$V_0'^{*} = 0 \text{ et } \forall \omega \in \Omega, V_1'^{*}(\omega) > 0$$

Sachant que $B_t > 0$ où t = 0, 1 et que suivant la proposition 2 $V_t^{*} = V_t / B_t \quad t = 0,1$ H' est donc tel que :

$$V_0' = 0 \text{ et } \forall \omega \in \Omega, V_1'(\omega) > 0$$

Par conséquent H' domine le portefeuille **0** = (0, 0, …, 0) ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 8:

S'il n'existe pas de portefeuille dominant, alors la loi du prix unique est vérifiée.

Démonstration:

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\hat{H}$ et $\tilde{H}$ tels que :

$$
\begin{aligned}
&\hat{V}_1(\omega) = \tilde{V}_1(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \\
&\hat{V}_0 > \tilde{V}_0
\end{aligned}
$$

On veut montrer une contradiction.

Puisque $B_t > 0$ on a :

$$
\begin{aligned}
&\hat{V}_1^{*}(\omega) = \tilde{V}_1^{*}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega \\
&\hat{V}_0^{*} > \tilde{V}_0^{*}
\end{aligned}
$$

Par conséquent $\hat{G}^*(\omega) = \hat{V}_1^*(\omega) - \hat{V}_0^* < \tilde{G}^*(\omega) = \tilde{V}_1^*(\omega) - \tilde{V}_0^*$

Soit le portefeuille H tel que :

$$H_n = \tilde{H}_n - \hat{H}_n \qquad n = 1, \dots, N$$
$$H_0 = -\sum_{n=1}^{N} \left(\tilde{H}_n - \hat{H}_n\right) S_n^*(0)$$

$$V_0^* = H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n\, S_n^*(0) = 0$$

$$\begin{aligned} G^*(\omega) &= \sum_{n=1}^{N} H_n\, \Delta S_n^*(1,\omega) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\tilde{H}_n - \hat{H}_n\right) \Delta S_n^*(1,\omega) \\ &= \tilde{G}^*(\omega) - \hat{G}^*(\omega) > 0 \end{aligned}$$

$$V_1^*(\omega) = V_0^* + G^*(\omega) > 0$$

Par conséquent il existe un portefeuille tel que :

$$V_0 = 0$$
$$V_1(\omega) > 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$$

ce qui signifie qu'il existe un portefeuille dominant : la contradiction recherchée.

<u>Exemple 2:</u>

$r = 0 \quad N = 2 \quad K = 2 \quad S_1(0) = 2 \quad S_1(1)(\omega_1) = 2 \quad S_1(1)(\omega_2) = 1$

$S_2(0) = 3 \quad S_2(1)(\omega_1) = 2 \quad S_2(1)(\omega_2) = 1$

La loi du prix unique n'est pas vérifiée : H = (0, 1, -1) est tel que V_0 = -1 et $V_1(\omega_1)$ = 0 = $V_1(\omega_2)$.

Il existe un portefeuille dominant : H = (1, 1, -1) est tel que V_0 = 0 et $V_1(\omega_1)$ = $V_1(\omega_2)$ = 1 >0.

Notons que la réciproque est fausse.

<u>Exemple 3:</u>

$r = 1 \quad N = 1 \quad K = 2 \quad S_0 = 10 \quad S_1(\omega_1) = 12 \quad S_1(\omega_2) = 8$

$$V_0 = H_0 + 10\,H_1$$

$$V_1(\omega_1) = 2H_0 + 12H_1$$
$$V_1(\omega_2) = 2H_0 + 8H_1$$

Soit $X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2$. On veut trouver un portefeuille $H = (H_0, H_1)$ tel que

$$(\mathrm{I})\begin{cases} V_1(\omega_1) = X_1 \\ V_1(\omega_2) = X_2 \end{cases}$$

Il existe une solution unique (pour $X = (X_1, X_2)$ donné) à ce système d'équations :

$$H_0 = \frac{3X_2 - 2X_1}{2} \qquad H_1 = \frac{X_1 - X_2}{4}$$

Par conséquent le prix d'un portefeuille quelconque rapportant $X = (X_1, X_2)$ est indépendant de $H = (H_0, H_1)$:

$$V_0 = H_0 + 10\,H_1 = \left(\frac{3X_2 - 2X_1}{2}\right) + 10\left(\frac{X_1 - X_2}{4}\right) = \frac{3}{2}X_1 - X_2$$

La loi du prix unique est vérifiée puisque deux portefeuilles rapportant la même chose (X_1, X_2) doivent coûter la même chose (en fait ici, deux portefeuilles différents auront des paiements différents car le système (I) admet une solution unique).
En revanche, il existe $H = (H_0, H_1)$ tel que $V_0 = 0$ et $V_1 >> 0$. Par exemple $H = (10, -1)$ est tel que $V_0 = 0$ et $V_1 = (8{,}12)$. Par conséquent, la loi du prix unique ne suffit pas à empêcher l'existence de portefeuilles dominants.

Définition:

Une opportunité[6] d'arbitrage est un portefeuille H tel que :

(i) $V_0 \leq 0,\ V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$ (opportunité d'arbitrage du premier type)

ou

(ii) $V_0 < 0,\ V_1 \geq 0$ (opportunité d'arbitrage du deuxième type)

On parle d'opportunité d'arbitrage du premier type lorsqu'il existe un portefeuille qui rapporte quelque chose dans au moins un état de la nature (de probabilité non nulle car $P(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$) en t=1 sans jamais rien coûter ni en t=0 ni en t=1. On parle d'opportunité d'arbitrage du deuxième type lorsqu'il existe un portefeuille qui rapporte quelque chose en t=0 sans jamais rien coûter en t=1. Notons que les deux types d'opportunités d'arbitrage ne s'excluent pas mutuellement. Ainsi un portefeuille H tel que $V_0 < 0,\ V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$ peut

[6] C'est la traduction littérale de l'anglais "arbitrage opportunity" très largement adoptée. Notons toutefois avec Jean-François Revel que: "Dire "opportunité" au lieu d'"occasion", c'est détruire le vrai sens d'opportunité, qui veut dire: qualité de ce qui survient ou est fait *au bon moment*. Cette qualité peut se manifester indépendamment du fait de se saisir ou de rater une occasion.". Cf. *Les plats de saison*, p. 44.

être considéré à la fois comme une opportunité d'arbitrage du premier type et du second type. Par contre, un portefeuille H tel que $V_0 = 0,\ V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$ est une opportunité d'arbitrage du premier type seulement. De même, un portefeuille H tel que $V_0 < 0,\ V_1 = 0$ est une opportunité d'arbitrage du deuxième type seulement.

<u>Proposition 9:</u>

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe des opportunités d'arbitrage.

(ii) Il existe un portefeuille H tel que $V_0 = 0$, $V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$.

(iii) Il existe un portefeuille H tel que $G \geq 0$ et $E_P G > 0$.

<u>Démonstration :</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons qu'il existe un portefeuille $\hat{H}$ tel que l'on ait une opportunité d'arbitrage du premier type ou du deuxième type. On veut montrer qu'il existe H tel que $V_0 = 0,\ V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$.

Il suffit de poser $H \equiv \hat{H} + \left(-\hat{V}_0, 0, ..., 0\right)$. En effet,

$$V_0 = \hat{V}_0 + \left(-\hat{V}_0\right) B_0 = 0 \text{ car } B_0 = 1$$

$$V_1 = \hat{V}_1 + \left(-\hat{V}_0\right) B_1 \geq 0 \text{ car } \hat{V}_1 \geq 0,\ \hat{V}_0 \leq 0 \text{ et } B_1 > 0$$

$E_P V_1 = E_P \hat{V}_1 + \left(-\hat{V}_0\right) E_P B_1 > 0$ car $E_P \hat{V}_1 > 0$ et $\left(-\hat{V}_0\right) \times \left(E_P B_1\right) \geq 0$ lorsque $\hat{H}$ est une opportunité d'arbitrage du premier type et $E_P \hat{V}_1 \geq 0$ et $\left(-\hat{V}_0\right) \times \left(E_P B_1\right) > 0$ lorsque $\hat{H}$ est une opportunité d'arbitrage du deuxième type.

On a donc réussi à construire un portefeuille H tel que $V_0 = 0,\ V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$, ce que l'on voulait démontrer.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supposons qu'il existe un portefeuille H tel que $V_0 = 0$, $V_1 \geq 0$ et $E_P V_1 > 0$. On veut montrer qu'il existe un portefeuille H' tel que $G' \geq 0$ et $E_P G' > 0$.

Posons H' $\equiv$ H

$$
\begin{aligned}
G' &\equiv H'_0\left(B_1 - B_0\right) + \sum_{n=1}^{N} H'_n \Delta S_n \\
&= H_0\left(B_1 - B_0\right) + \sum_{n=1}^{N} H_n\left(S_n(1) - S_n(0)\right) \\
&= \left(H_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1)\right) - \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)\right) \\
&= V_1 - V_0 = V_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$E_P G' \equiv E_P V_1 > 0$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supposons qu'il existe un portefeuille H tel que $G \geq 0$ et $E_P G > 0$. On veut montrer qu'il existe des opportunités d'arbitrage.

En effet, soit $\hat{H}$ tel que

$$\hat{H}_n \equiv H_n \text{ où } n = 1, \ldots, N$$

$$\hat{H}_0 \equiv -\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0)$$

$$\hat{V}_0 = \hat{H}_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} \hat{H}_n S_n(0)$$

On a $$= \left(-\sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0)\right) B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)$$

$$= \left(-\sum_{n=1}^{N} H_n \frac{S_n(0)}{B_0}\right) B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) = 0$$

$\hat{V}_1 = \hat{V}_0 + \hat{G} = G \geq 0$ car $\hat{H}$ et H ont la même composition d'actifs risqués.

$$E_P \hat{V}_1 = E_P G > 0$$

On a donc réussi à construire un portefeuille $\hat{H}$ tel que $\hat{V}_0 = 0$, $\hat{V}_1 \geq 0$ et $E_P \hat{V}_1 > 0$, ce que l'on voulait démontrer.

Proposition 10:

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Il existe des opportunités d'arbitrage.

(ii) Il existe un portefeuille H tel que $V_0^* = 0$, $V_1^* \geq 0$ et $E_P V_1^* > 0$.

(iii) Il existe un portefeuille H tel que $G^* \geq 0$ et $E_P G^* > 0$.

Démonstration :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons qu'il existe un portefeuille $\hat{H}$ tel que l'on ait une opportunité d'arbitrage du premier type ou du deuxième type. On veut montrer qu'il existe H tel que $V_0^* = 0$, $V_1^* \geq 0$ et $E_P V_1^* > 0$.

En effet, on sait que $B_t > 0 \quad \forall t = 0,1$ et que $V_t^* = \frac{V_t}{B_t}$.

Proposition 11:

S'il existe un portefeuille dominant alors il existe une opportunité d'arbitrage.

Cette proposition revient à dire (c'est la contraposée de la proposition 11) qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage il ne peut exister de portefeuille dominant (et par conséquent, d'après la proposition 7, la loi du prix unique est vérifiée).

Démonstration :

D'après (1-4), s'il existe un portefeuille dominant alors il existe H tel que

$$V_0 = 0 \text{ et } V_1(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

H est donc une opportunité d'arbitrage, ce que l'on voulait démontrer.

Notons que la réciproque est fausse.

Exemple 4 :

En effet, soient $K = 2, \ N = 1, \ r = 0, \ S_0 = 10, \ S_1(\omega_1) = 12, \ S_1(\omega_2) = 10$.

$H = (-10,1)$ est une opportunité d'arbitrage:

$$V_0 = -10 + 1 x 10 = 0$$

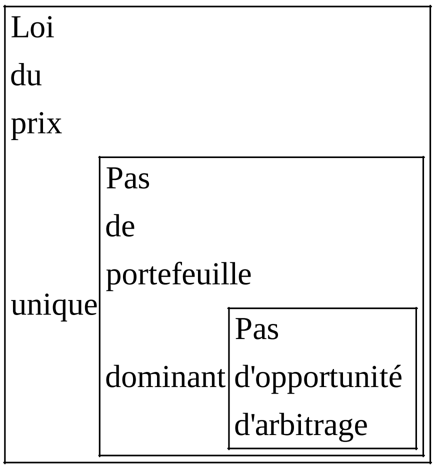
$$V_1 = -10 x 1 + 1 S_1(\omega) = \left| \begin{array}{l} 2 \text{ si } \omega_1 \\ 0 \text{ si } \omega_2 \end{array} \right.$$

En revanche il n'y a pas de portefeuille dominant. D'après la proposition 6 il existe un portefeuille dominant ssi il existe un portefeuille H = (H_0, H_1) tel que $V_0 = H_0 + 10\ H_1 = 0$ et $V_1(\omega_1) = H_0 + 12\ H_1 > 0$, $V_1(\omega_2) = H_0 + 10\ H_1 > 0$. Or il est impossible de satisfaire simultanément les 3 conditions. De la première on tire $H_0 = -10\ H_1$ ce qui donne $V_1(\omega_1) = 2\ H_1 > 0$ si $H_1 > 0$ et $V_1(\omega_2) = 0$.

puisque $\Pi = (0,1)$ est une mesure linéaire d'évaluation:

$$S_0^* = 0 \times S_1^*(\omega_1) + 1 \times S_1^*(\omega_2)$$
$$\frac{10}{1} = 0 \times \frac{12}{1} + 1 \times \frac{10}{1}$$

En effet, d'après la proposition 1.7, lorsqu'il existe une mesure linéaire d'évaluation il n'existe pas de portefeuille dominant.



1.3 Caractérisation de la loi du prix unique, de l'absence de portefeuille dominant et d'absence d'opportunité d'arbitrage

<u>Proposition 12:</u>

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il existe $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^K / \{\mathbf{0}\}$ tel que

$$S_n^*(0) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k S_n^*(1)(\omega_k) \quad \text{pour tout } n = 1, \ldots, N$$

et $\sum_{k=1}^{K} \beta_k = 1$

<u>Démonstration :</u>

$\Rightarrow$ Nous allons utiliser le théorème suivant :

<u>Théorème de l'alternative :</u>

Soit A une matrice m × n de rang quelconque, a un vecteur ligne et α un scalaire différent de zéro. Un et un seul des deux systèmes suivants admet une solution.

I : u A = a

II : A x = 0, a x = α.

Supposons la loi du prix unique vérifiée. Alors d'après la proposition 4 le système d'équations A H = b

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} B_0 & S_1(0) & \dots & S_N(0) \\ B_1(\omega_1) & S_1(1)(\omega_1) & \dots & S_N(1)(\omega_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1)(\omega_K) & \dots & S_N(1)(\omega_K) \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad c \neq 0$$

n'admet pas de solution. Par conséquent d'après ??? il existe $y \in \mathbb{R}^{K+1}$ tel que :

y . A = 0 et y . b > 0

$$\begin{cases} y_0 B_0 + \sum_{k=1}^{K} y_k B_1(\omega_k) = 0 \\ y_0 S_n(0) + \sum_{k=1}^{K} y_k S_n(1)(\omega_k) = 0 \quad \text{où } n=1,\dots,N \\ y_0 c > 0 \end{cases}$$

Puisque $c \neq 0$ on a également $y_0 \neq 0$. Définissons $\beta_k \equiv \frac{-y_k B_1(\omega_k)}{y_0 B_0}$

De la première équation on déduit

$$\sum_{k=1}^{K} \beta_k = 1$$

De la seconde

$$S_n(0) = \sum_{k=1}^{K} \left({-y_k}/{y_0} \right) S_n(1)(\omega_k)$$

$$S_n^*(0) B_0 = \sum_{k=1}^{K} \left({-y_k}/{y_0} \right) S_n^*(1)(\omega_k) B_1(\omega_k)$$

$$S_n^*(0) = \sum_{k=1}^{K} \left({-y_k B_1(\omega_k)}/{y_0 B_0} \right) S_n^*(1)(\omega_k)$$

$$S_n^*(0)=\sum_{k=1}^{K}\beta_k S_n^*(1)(\omega_k) \text{ pour tout n = 1, …, N}$$

<u>Proposition 13</u>:

La loi du prix unique est vérifiée si et seulement si il existe $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^K/\{\mathbf{0}\}$, $\sum_{k=1}^{K}\beta_k=1$ tel que

pour tout portefeuille H on a :

$$V_0^*=\sum_{k=1}^{N}\beta_k V_1^*(\omega_k)$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^{K}\beta_k G^*(\omega_k)=0$$

<u>Démonstration :</u>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K}\beta_k V_1^*(\omega_k) &= \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(H_0+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n^*(1)(\omega_k)\right)\\
&= H_0\underbrace{\sum_{k=1}^{K}\beta_k}_{=1}+\sum_{n=1}^{N}H_n\underbrace{\sum_{k=1}^{K}\beta_k S_n^*(1)(\omega_k)}_{=S_n^*(0)}\\
&= H_0+\sum_{n=1}^{N}H_nS_n^*(0)=V_0^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K}\beta_k G^*(\omega_k) &= \sum_{k=1}^{K}\beta_k\left(V_1^*(\omega_k)-V_0^*\right)\\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{K}\beta_k V_1^*(\omega_k)}_{=V_0^*}-V_0^*\underbrace{\sum_{k=1}^{K}\beta_k}_{=1}\\
&= V_0^*-V_0^*
\end{aligned}$$

<u>Exemple:</u>

Dans cet exemple, la loi du prix unique est vérifiée :

		t = 1	
	t = 0	ω_1	ω_2
B_t	1	2	2
$S_1(t)$	10	12	8
$S_1^*(t)$	10	6	4
V_t^*	H_0+10H_1	H_0+6H_1	H_0+4H_1
G*		$-4H_1$	$-6H_1$

$$\begin{cases}10=\beta_1\times 6+\beta_2\times 4\\ 1=\beta_1+\beta_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1=3\\ \beta_2=-2\end{cases}$$

$$H_0+10H_1=\beta_1\left(H_0+6H_1\right)+\beta_2\left(H_0+4H_1\right)$$

$$H_0+10H_1=H_0\left(\beta_1+\beta_2\right)+H_1\left(6\beta_1+4\beta_2\right)$$

$$\begin{cases}6\beta_1+4\beta_2=10\\ \beta_1+\beta_2=1\end{cases}$$

$$0=\beta_1\left(-4H_1\right)+\beta_2\left(-6H_1\right)$$

$$0=-2H_1\left(2\beta_1+3\beta_2\right)$$

$$\begin{cases}2\beta_1+3\beta_2=0\\ \beta_1+\beta_2=1\end{cases}$$

Dans cet exemple, la loi du prix unique n’est pas vérifiée :

		$t = 1$		
	$t = 0$	ω_1	ω_2	ω_3
B_t	1	1	1	2
$S_1(t)$	10	8	12	20
$S_2(t)$	5	12	8	20
$S_1^*(t)$	10	8	12	10
$S_2^*(t)$	5	12	8	10
V_t^*	$H_0 + 10H_1 + 5H_2$	$H_0 + 8H_1 + 12H_2$	$H_0 + 12H_1 + 8H_2$	$H_0 + 10H_1 + 10H_2$
G*		$-2H_1 + 7H_2$	$2H_1 + 3H_2$	$5H_2$

$$\begin{cases} 10 = \beta_1 \times 8 + \beta_2 \times 12 + \beta_3 \times 10 \\ 5 = \beta_1 \times 12 + \beta_2 \times 8 + \beta_3 \times 10 \\ 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

En faisant la somme des deux premières équations on obtient une incompatibilité :

$$\begin{cases} 15 = 20(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{cases}$$

Il n'existe pas etc…

$$H_0 + 10H_1 + 5H_2 = \beta_1 (H_0 + 8H_1 + 12H_2) + \beta_2 (H_0 + 12H_1 + 8H_2) + \beta_3 (H_0 + 10H_1 + 10H_2)$$

$$H_0 + 10H_1 + 5H_2 = H_0 (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + H_1 (8\beta_1 + 12\beta_2 + 10\beta_3) + H_2 (12\beta_1 + 8\beta_2 + 10\beta_3)$$

$$\begin{cases} 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 10 = 8\beta_1 + 12\beta_2 + 10\beta_3 \\ 5 = 12\beta_1 + 8\beta_2 + 10\beta_3 \end{cases}$$

En faisant la somme des deux dernières équations on obtient une incompatibilité :

$$\begin{cases} 1 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 15 = 20(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \end{cases}$$

$$0 = \beta_1 (-2H_1 + 7H_2) + \beta_2 (2H_1 + 3H_2) + \beta_3 (5H_2)$$

$$0 = H_1 (-2\beta_1 + 2\beta_2) + H_2 (7\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3)$$

$$\begin{cases} -2\beta_1 + 2\beta_2 = 0 \\ 7\beta_1 + 3\beta_2 + 5\beta_3 = 0 \end{cases}$$

$$5(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 0$$

<u>Définition:</u>

Le vecteur Π est une mesure linéaire d'évaluation si et seulement si c'est une mesure de probabilité sur Ω telle que :

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega)\, S_n^*(1,\omega) \qquad n = 1,\dots, N$$

$$\text{où } \forall\omega\in \Omega, \Pi(\omega) \geq 0 \text{ et } \sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega) = 1$$

<u>Proposition 14</u>:

$\Pi = (\pi(\omega_1),\dots,\pi(\omega_k)) \geq 0$ et $\Pi \neq \mathbf{0}$ est mesure linéaire d'évaluation si et seulement si pour tout portefeuille H on a :

$$V_0^* = \sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega)\, V_1^*(\omega)$$

ou encore

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega)\, G^*(\omega) = 0$$

<u>Démonstration</u> :

$\Rightarrow$ Supposons que Π est une mesure linéaire d'évaluation. On a donc pour tout portefeuille H:

$$V_0^* = \sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega) V_1^*(\omega)$$

$$H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n\, S_n^*(0) = \sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega) \left(H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1,\omega) \right)$$

Prenons $H = (H_0, 0,\dots,0)$ où $H_0 \neq 0$, on obtient :

$$H_0 = H_0 \sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega)$$

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pi(\omega) = 1 \text{ car } H_0 \neq 0.$$

Π est donc une mesure de probabilité.

Soit le portefeuille $H^{(i)} = (0, \dots, 0, H_i, 0, \dots, 0)$ tel que $H_n = 0 \quad \forall n \neq i \in \{1, \dots, N\}$ et $H_i \neq 0$.

$$H_i S_i^*(0) = H_i \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) S_i^*(1, \omega)$$

$$S_i^*(0) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) S_i^*(1, \omega) \text{ pour } i = 1, \dots, N \text{ car } H_i \neq 0$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, supposons qu'il existe une mesure de probabilité Π telle que :

$$S_n^*(0) = \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) S_n^*(1, \omega) \qquad n = 1, \dots, N$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} V_0^* &\equiv H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(0) \\ &= H_0 \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) + \sum_{n=1}^{N} H_n \left\{ \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) S_n^*(1, \omega) \right\} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) \left\{ H_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n^*(1, \omega) \right\} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) V_1^*(\omega) \end{aligned}$$

<u>Proposition 15:</u>

Il existe une mesure linéaire d'évaluation si et seulement si il n'existe pas de portefeuille dominant.

$\Rightarrow$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une mesure linéaire d'évaluation mais qu'il existe un portefeuille dominant. On veut montrer une contradiction.

D'après 1.4. il existe un portefeuille H tel que $V_1^* = 0$ et $V_1^*(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$. Puisque Π est une mesure linéaire d'évaluation on doit avoir $V_0^* = \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) V_1^*(\omega)$. D'où:

$$0 = V_0^* = \sum_{\omega \in \Omega} \Pi(\omega) V_1^*(\omega) > 0$$

On obtient donc 0 > 0, la contradiction recherchée.

$\Leftarrow$ Supposons qu'il n'existe pas de portefeuille dominant. On veut montrer qu'il existe une mesure linéaire d'évaluation. Soient les ensembles suivants:

$$W = \left\{ X \in \mathbb{R}^K : \exists H \in \mathbb{R}^{N+1}, G^* = X \right\} \text{ où } G^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*$$

$$\mathbb{R}_{++}^K = \left\{ X = \left(X_1, ..., X_K \right) \in \mathbb{R}^K : \; X_k > 0 \quad \text{pour tout } k = 1, ..., K \right\}$$

Première étape: On montre qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^K/\{0\}$ tel que:

$\forall X \in W, \forall Y \in \mathbb{R}_{++}^K \; \beta.X \leq \beta.Y$

Pour ce faire nous allons utiliser le théorème suivant:

Théorème de séparation de Minkowski:

Soient deux ensembles de $\mathbb{R}^K$ convexes, non vides, disjoints A et B. Alors il existe $\beta \in \mathbb{R}^K/\{0\}$ tel que:

$\forall X \in A, \forall Y \in B \; \beta.X \leq \beta.Y$

Nous allons montrer que W et $\mathbb{R}_{++}^K$ jouent le rôle de A et B dans le théorème de Minkowski, respectivement.

1. W est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^K$.
2. W est non-vide: En effet, $0 \in W$. Il suffit de considérer le portefeuille $H = (H_0, 0, \ldots, 0)$ où H_0 est un réel quelconque. Un tel portefeuille a un gain nul exprimé en terme du numéraire puisqu'il est composé uniquement de numéraire.
3. W est convexe: Soient $X, Y \in W$ et soient $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $\lambda X + (1 - \lambda) Y \in W$ c'est à dire qu'il existe H tel que $G^* = \lambda X + (1 - \lambda) Y$.

Soient H^X et H^Y les portefeuilles dont le gain exprimé en terme du numéraire est égal à X et Y, respectivement. Soit $H \equiv \lambda H^X + (1 - \lambda) H^Y$ où H^X et H^Y sont tels que $G_X^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n^X \Delta S_n^* = X$ et $G_Y^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n^Y \Delta S_n^* = Y$. Le gain exprimé en terme du numéraire du portefeuille H est donné par

$$\begin{aligned} G^* &\equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left(\lambda H_n^X + (1-\lambda) H_n^Y \right) \Delta S_n^* \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{N} H_n^X \Delta S_n^* + (1-\lambda) \sum_{n=1}^{N} H_n^Y \Delta S_n^* \\ &= \lambda X + (1-\lambda) Y \end{aligned}$$

4. $\mathbb{R}_{++}^K$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}^K$.

5. $\mathbb{R}^K_{++} \neq \emptyset$. En effet, $e \equiv (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^K_{++}$.

6. $\mathbb{R}^K_{++}$ convexe: Soient X, Y $\in \mathbb{R}^K_{++}$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que λ X + (1 - λ) Y $\in \mathbb{R}^K_{++}$. Il y a trois cas à considérer:

1^er Cas: $\lambda = 0$. Alors λ X + (1 - λ) Y $\equiv$ Y $\in \mathbb{R}^K_{++}$ par définition.

2^ème Cas: $\lambda = 1$. Alors λ X + (1 - λ) Y $\equiv$ X $\in \mathbb{R}^K_{++}$ par définition.

3^ème Cas: $0 < \lambda < 1$. Alors λ X + (1 - λ) Y $\in \mathbb{R}^K_{++}$ car le produit d'un réel strictement positif avec un vecteur de $\mathbb{R}^K_{++}$ donne un vecteur de $\mathbb{R}^K_{++}$ et la somme de deux vecteurs de $\mathbb{R}^K_{++}$ donne un vecteur de $\mathbb{R}^K_{++}$.

7. Nous avons montré que W et que $\mathbb{R}^K_{++}$ sont des sous-ensembles non vides et convexes de $\mathbb{R}^K$. Par ailleurs, en l'absence de portefeuille dominant W $\cap$ $\mathbb{R}^K_{++} = \emptyset$. En effet, d'après les propositions 1.4 et 1.5. il existe un portefeuille dominant si et seulement si il existe un portefeuille tel que $G^*(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$. Par conséquent, il n'existe pas de portefeuille dominant si et seulement si il n'existe pas un portefeuille tel que $G^*(\omega) > 0 \ \forall \omega \in \Omega$. En l'absence de portefeuille dominant, W et $\mathbb{R}^K_{++}$ sont donc disjoints. On peut donc appliquer le théorème de Minkowski c'est-à-dire on sait qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^K/\{0\}$ tel que:

$\forall$ X $\in$ W, $\forall$ Y $\in \mathbb{R}^K_{++}$ $\beta.X \leq \beta.Y$

Deuxième étape:

Montrons que $\beta \in \mathbb{R}^K_{+}/\{0\}$. On sait déjà que $\beta \neq \mathbf{0}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe k tel que $\beta_k < 0$. On veut montrer une contradiction.

Puisque $\mathbf{0} \in$ W on a $\forall$ Y $\in \mathbb{R}^K_{++}$

$0 = \beta.\mathbf{0} \leq \beta.Y$

Soit $Y_{(k)} = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, \alpha, \varepsilon, \ldots, \varepsilon) \in \mathbb{R}^K_{++}$ où $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$.

$$\beta.Y_{(k)} = \left(\sum_{l \neq k} \beta_l\right)\varepsilon + \beta_k \alpha$$

Il y a deux cas à considérer:

1^er Cas: $\left(\sum_{l \neq k} \beta_l\right) \leq 0$. Alors $\forall$ $\varepsilon > 0$ et $\forall$ $\alpha > 0$, $\beta.Y_{(k)} < 0$: contradiction.

$2^{\text{ème}}$ Cas: $\left(\sum_{l\neq k}\beta_l\right) > 0$ alors pour α suffisamment grand ($\alpha > \frac{\left(\sum_{l\neq k}\beta_l\right)\varepsilon}{(-\beta_k)}$) et pour $\varepsilon > 0$ on a $\beta.Y_{(k)} < 0$: contradiction.

Dans les deux cas nous avons trouvé $Y_{(k)} \in \mathbb{R}^K_{++}$ tel que $\beta.Y_{(k)} < 0$, la contradiction recherchée.

Troisième étape:

Montrons maintenant que $\beta \in W^{\perp} \equiv \left\{Y \in \mathbb{R}^K : \forall X \in W, Y.X = 0\right\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\overline{X} \in W$ tel que $\beta.\overline{X} \neq 0$. On veut montrer une contradiction.

Soit e ≡ (1, …, 1) ∈ $\mathbb{R}^K_{++}$. On peut trouver un réel α_0 tel que $\alpha_0\left(\beta.\overline{X}\right) > \beta.e \equiv \sum_{l=1}^{K}\beta_l$ car $\sum_{l=1}^{K}\beta_l$ est un réel strictement positif (donc fini). Or $\left(\alpha_0\overline{X}\right) \in W$: il suffit de considérer le portefeuille $\alpha_0 H^{\overline{X}}$ dont le gain exprimé en terme du numéraire est $G^* = \alpha_0\overline{X}$. Par conséquent, on a trouvé $X \equiv \alpha_0\overline{X} \in W$ et e ≡ (1, …, 1) ∈ $\mathbb{R}^K_{++}$ tels que $\beta.\left(\alpha_0\overline{X}\right) > \beta.e$, la contradiction recherchée.

Quatrième étape:

Soit $\Pi \equiv \beta$. Montrons que Π ainsi défini est une mesure linéaire d'évaluation:

1. $\Pi \in \mathbb{R}^K_{+} / \{0\}$
2. $\sum_{\omega\in\Omega}\Pi(\omega)\times G^*(\omega) \equiv \Pi \cdot G^* = 0$ car G* ∈ W et $\Pi \in W^{\perp}$.

Définition :

Une mesure de probabilité Q sur Ω est une mesure de probabilité risque-neutre si et seulement si :

a) $Q(\omega) > 0 \quad \forall\omega \in \Omega$ et $\sum_{\omega\in\Omega} Q(\omega) = 1$

b) $E_Q\left[\Delta S^*_n\right] = 0 \quad n = 1,\ldots,N$ ce qui équivaut à $S^*_n(0) = E_Q\left[S^*_n(1)\right] \quad n = 1,\ldots,N$.

Une mesure de probabilité risque-neutre est une mesure linéaire d'évaluation dont la probabilité pour chaque état de la nature est strictement positive.

<u>Proposition 16:</u>

Il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage si et seulement si il existe une mesure de probabilité risque neutre Q.

Avant de démontrer cette proposition, nous allons illustrer les trois cas qui peuvent se présenter :

1) Il existe une seule mesure de probabilité risque-neutre.
2) Il en existe plusieurs (par exemple, une infinité non dénombrable).
3) Il n'en existe pas.

<u>Premier cas:</u>

Exemple : 1.1. : $K=2,\quad N=1,\ r=1/9,\quad S_0=5,\quad S_1(\omega_1)=20/3,\quad S_1(\omega_2)=40/9$

On cherche $Q=\left(Q(\omega_1),Q(\omega_2)\right)>>0$ telle que :

$$\begin{cases}6Q(\omega_1)+4Q(\omega_2)=5\\ Q(\omega_1)+Q(\omega_2)=1\end{cases}$$

La solution unique de ce système d'équation est donnée par:

$$Q=(1/2,\,1/2)>>(0,0)$$

D'après 1.13, il n'y a donc pas d'opportunité d'arbitrage. On peut le vérifier directement en montrant qu'il est impossible de trouver un portefeuille H tel que $G^*\geq 0$ et $E_PG^*>0$

où $G^*=H_1\left(S_1^*-5\right)=\begin{vmatrix}H_1\ \text{si}\ \omega_1\\ -H_1\ \text{si}\ \omega_2\end{vmatrix}$

Le seul cas où $G^*(\omega)\geq 0$ pour tout $\omega\in\Omega$ est lorsque H_1 = 0 auquel cas $E_PG^*=0$. Il n'existe donc pas, d'après la proposition 1.12, d'opportunité d'arbitrage.

<u>Deuxième cas:</u>

Exemple 1-2 :

$K=3,\quad N=1,\quad r=1/9,\quad S_0=5,\quad S_1(\omega_1)=20/3,\quad S_1(\omega_2)=40/9,\quad S_1(\omega_3)=30/9$

On cherche $Q=\left(Q(\omega_1),Q(\omega_2),Q(\omega_3)\right)>>(0,0,0)$ tel que :

$$\begin{cases}5=6Q(\omega_1)+4Q(\omega_2)+3Q(\omega_3)\\ 1=Q(\omega_1)+Q(\omega_2)+Q(\omega_3)\end{cases}$$

On peut prendre comme paramètre $Q(\omega_3)$ et résoudre le système suivant de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{cases} 5-3Q(\omega_3)=6Q(\omega_1)+4Q(\omega_2) \\ 1-Q(\omega_3)=Q(\omega_1)+Q(\omega_2) \end{cases}$$

dont la solution est donnée par:

$$Q(\omega_1)=\frac{1+Q(\omega_3)}{2}$$

$$Q(\omega_2)=\frac{1-3Q(\omega_3)}{2}$$

L'ensemble des solutions est donc donné par:

$$Q=\left(\frac{1+\lambda}{2},\frac{1-3\lambda}{2},\lambda\right) \text{ où } 0<\lambda<\frac{1}{3}$$

D'après 1-13, il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage puisqu'il suffit qu'on trouve une mesure de probabilité risque neutre et qu'on en a trouvé une infinité. On peut le vérifier directement en montrant qu'il est impossible de trouver un portefeuille H tel que $G^* \geq 0$ et $E_P G^* > 0$

$$\text{où } G^*=H_1\left(S_1^*-5\right)=\begin{vmatrix} H_1 \text{ si } \omega_1 \\ -H_1 \text{ si } \omega_2 \\ -2H_1 \text{ si } \omega_3 \end{vmatrix}$$

Le seul cas où $G^*(\omega)\geq 0$ pour tout $\omega\in\Omega$ est lorsque $H_1 = 0$ auquel cas $E_P G^*=0$. Il n'existe donc pas, d'après la proposition 1.12, d'opportunité d'arbitrage.

<u>Troisième cas:</u>

Exemple 1.3 : $K=3,\quad N=2,\quad r=1/9$

N	$S_n(0)$	$S_n(1)$		
		ω_1	ω_2	ω_3
1	5	60/9	60/9	40/9
2	10	40/3	80/9	80/9

On cherche $Q=\left(Q(\omega_1),Q(\omega_2),Q(\omega_3)\right)>>0$ tel que :

$$\begin{cases} 5 = 6Q(\omega_1) + 6Q(\omega_2) + 4Q(\omega_3) \\ 10 = 12Q(\omega_1) + 8Q(\omega_2) + 8Q(\omega_3) \\ 1 = Q(\omega_1) + Q(\omega_2) + Q(\omega_3) \end{cases}$$

Il existe une solution unique :

$$Q = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Il n'existe pas de mesure risque neutre (car $Q(\omega_2) = 0$) et par conséquent il doit exister au moins une opportunité d'arbitrage. On peut le vérifier directement en montrant qu'il est possible de trouver un portefeuille H tel que $G^* \geq 0$ et $E_P G^* > 0$

où $G^* = H_1\left(S_1^* - 5\right) = \begin{vmatrix} H_1 + 2H_2 \text{ si } \omega_1 \\ H_1 - 2H_2 \text{ si } \omega_2 \\ -H_1 - 2H_2 \text{ si } \omega_3 \end{vmatrix}$

Pour $H_1 = 2$ et $H_2 = -1$ on a $G^* = (0, 4, 0)$. Par conséquent, il existe donc, d'après la proposition 1.12, des opportunités d'arbitrage. Par exemple, le portefeuille $H = (0, 2, -1)$ est une opportunité d'arbitrage (du premier type) puisque $V_0 = 0$ et $V_1 = (0, 4, 0)$.

Dans le cas où N = 1 on peut trouver une démonstration simple de la condition nécessaire de la proposition 1-13. Notons également que la réciproque de la proposition 1.13 est immédiate, même dans le cas où il existe N > 1 actifs risqués.

Démonstration de la proposition 16 dans le cas où N = 1[i]:

On sait qu'il existe une opportunité d'arbitrage si et seulement si on peut construire un portefeuille H tel que $G^* \geq 0$ et $E_P G^* > 0$. Or dans le cas où N = 1, on a $G^* = H_1 \Delta S_1^*$. Il existera donc des opportunités d'arbitrage que dans deux cas:

ou bien $\Delta S_1^* \geq 0$ et $E_P \Delta S_1^* > 0$ c-à-d $\forall \omega \in \Omega, \Delta S_1^*(\omega) \geq 0$ et $\exists \tau \in \Omega, \Delta S_1^*(\tau) > 0$

(auquel cas il suffit d'acheter H_1 unités d'actifs 1 en empruntant suffisamment).

ou bien $\Delta S_1^* \leq 0$ et $E_P \Delta S_1^* < 0$ c-à-d $\forall \omega \in \Omega, \Delta S_1^*(\omega) \leq 0$ et $\exists \sigma \in \Omega, \Delta S_1^*(\sigma) < 0$

(auquel cas il suffit de vendre à découvert H_1 unités d'actifs 1 et de placer le produit de cette vente dans l'actif sans risque).

Au contraire il n'y aura pas d'opportunités d'arbitrage dans les cas suivants:

Ou bien $\forall \omega \in \Omega, \Delta S_1^*(\omega) = 0$

Ou bien il existe au moins deux états de la nature σ et τ tels que $\Delta S_1^*(\sigma) < 0$ et $\Delta S_1^*(\tau) > 0$

$\Rightarrow$ Supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage. On veut montrer qu'il existe une mesure de probabilité risque-neutre.

Il faut distinguer deux cas.

<u>1er cas:</u> $\forall \omega \in \Omega, \Delta S_1^*(\omega) = 0$

Il suffit de prendre pour mesure de probabilité risque neutre la mesure de probabilité P représentant les anticipations des agents. En effet,

$\forall \omega \in \Omega, P(\omega) > 0$

$E_P \Delta S_1^* = E_P 0 = 0$

<u>2ème cas:</u> il existe au moins deux états de la nature σ et τ tels que $\Delta S_1^*(\sigma) < 0$ et $\Delta S_1^*(\tau) > 0$.

On peut partitionner l'ensemble des états de la nature en 3 ensembles:

- $\Omega_G = \{\omega \in \Omega : \Delta S_1^*(\omega) < 0\} \neq \varnothing$ puisque $\sigma \in \Omega_G$. Dans ce cas on a Card $\Omega_G \geq 1$.
- $\Omega_C = \{\omega \in \Omega : \Delta S_1^*(\omega) = 0\} \neq \Omega$ sinon on retombe dans le premier cas. Dans ce cas on a Card $\Omega_C <$ Card Ω.
- $\Omega_D = \{\omega \in \Omega : \Delta S_1^*(\omega) > 0\} \neq \varnothing$ puisque $\tau \in \Omega_D$. Dans ce cas on a Card $\Omega_D \geq 1$

Nous allons assigner à chaque état de la nature appartenant à un même sous-ensemble une même probabilité d'occurrence. Soit la distribution de probabilité Q définie de la manière suivante:

$\forall \omega \in \Omega_G, Q(\omega) \equiv \alpha$

$\forall \omega \in \Omega_C, Q(\omega) \equiv \beta$

$\forall \omega \in \Omega_D, Q(\omega) \equiv \gamma$

Montrons que Q est une mesure de probabilité risque-neutre:

$$\begin{cases} E_Q\left(\Delta S_1^*\right) \equiv \alpha \sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega) + \beta \sum_{\omega\in\Omega_C} \Delta S_1^*(\omega) + \gamma \sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega) = 0 \\ \alpha \mathrm{Card}\Omega_G + \beta \mathrm{Card}\Omega_C + \gamma \mathrm{Card}\Omega_D = 1 \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \gamma > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\{ \frac{\mathrm{Card}\Omega_D}{\mathrm{Card}\Omega_G} \times \frac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)} \right\} \left(\alpha \mathrm{Card}\Omega_G\right) + \left(\gamma \mathrm{Card}\Omega_D\right) = 0 \\ \left(\alpha \mathrm{Card}\Omega_G\right) + \left(\gamma \mathrm{Card}\Omega_D\right) = 1 - \left(\beta \mathrm{Card}\Omega_C\right) \\ 0 < \left(\alpha \mathrm{Card}\Omega_G\right) < 1 \\ 0 \leq \left(\beta \mathrm{Card}\Omega_C\right) < 1 \\ 0 < \left(\gamma \mathrm{Card}\Omega_D\right) < 1 \end{cases}$$

Il y a deux cas à considérer. Soit Card $\Omega_C = 0$, soit Card $\Omega_C \neq 0$.

<u>1er cas</u>: Card $\Omega_C = 0$.

L'ensemble des mesures de probabilités risque-neutre Q est donné par:

$$\alpha = \frac{1}{\mathrm{Card}\Omega_G - \left\{ \mathrm{Card}\Omega_D \times \frac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)} \right\}} > 0$$ puisque le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs.

$$\gamma = \frac{1}{\mathrm{Card}\Omega_D} \times \frac{-\left\{ \frac{\mathrm{Card}\Omega_D}{\mathrm{Card}\Omega_G} \times \frac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)} \right\}}{1 - \left\{ \frac{\mathrm{Card}\Omega_D}{\mathrm{Card}\Omega_G} \times \frac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)} \right\}} > 0$$ puisque le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs.

<u>2ème cas</u>: Card $\Omega_C \geq 1$.

L'ensemble des mesures de probabilités risque-neutre Q est donné par:

$$\alpha = \frac{\dfrac{1-\left(\beta \mathrm{Card}\Omega_C\right)}{\mathrm{Card}\Omega_G}}{1-\left\{\dfrac{\mathrm{Card}\Omega_D}{\mathrm{Card}\Omega_G} \times \dfrac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)}\right\}} > 0$$

$$\gamma = \frac{-\left\{\dfrac{\mathrm{Card}\Omega_D}{\mathrm{Card}\Omega_G} \times \dfrac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)}\right\}}{1-\left\{\dfrac{\mathrm{Card}\Omega_D}{\mathrm{Card}\Omega_G} \times \dfrac{\sum_{\omega\in\Omega_G} \Delta S_1^*(\omega)}{\sum_{\omega\in\Omega_D} \Delta S_1^*(\omega)}\right\}} \frac{\left\{1-\left(\beta \mathrm{Card}\Omega_C\right)\right\}}{\mathrm{Card}\Omega_D} > 0$$

$$0 < \beta < \frac{1}{\mathrm{Card}\Omega_C}$$

$\Leftarrow$ Au lieu de supposer l'existence d'une mesure de probabilité risque-neutre et d'en déduire l'absence d'opportunité d'arbitrage, nous allons démontrer la contraposée. Supposons qu'il existe des opportunités d'arbitrage et montrons qu'il ne peut exister de mesure de probabilité risque-neutre.

S'il existe une opportunité d'arbitrage, il sera impossible de trouver une mesure de probabilité risque-neutre puisque pour tout $\mathbf{Q} >> \mathbf{0}$ on aura ou bien $E_Q \Delta S_1^* < 0$ ou bien $E_Q \Delta S_1^* > 0$ mais jamais $E_Q \Delta S_1^* = 0$.

Démonstration de la proposition 16 dans le cas où N > 1[ii]:

$\Rightarrow$ Soient les ensembles suivants:

$W = \left\{X \in \mathbb{R}^K : \exists H \in \mathbb{R}^{N+1}, G^* = X\right\}$ où $G^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*$

$A^+ = \left\{X \in \mathbb{R}_+^K / \{0\} : E_P X = 1\right\}$

Première étape: On montre qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^K/\{0\}$ et deux nombres réels b_1 et b_2 tels que:

$\forall X \in W, \forall Y \in A^+ \; \beta.X \leq b_1 < b_2 \leq \beta.Y$

Pour ce faire nous allons utiliser le théorème suivant:

Théorème de séparation stricte de Minkowski:

Soient deux ensembles de $\mathbb{R}^K$ convexes, non vides, disjoints A et B, A fermé et B compact.

Alors il existe $\beta \in \mathbb{R}^K/\{0\}$ et deux nombres réels b_1 et b_2 tels que:

$\forall X \in A, \forall Y \in B\ \beta.X \leq b_1 < b_2 \leq \beta.Y$

Nous allons montrer que W joue le rôle de A et A^+ celui de B.

1. W est fermé:

On a le résultat mathématique suivant:

Théorème:

Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

(i) W est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^K$ espace vectoriel normé.

(ii) W est un sous-espace vectoriel:

8. W est un sous-ensemble de l'espace vectoriel (normé) $\mathbb{R}^K$.
9. W est non-vide: En effet, $0 \in W$. Il suffit de considérer le portefeuille $H = (H_0, 0, \ldots, 0)$. Un tel portefeuille a un gain nul exprimé en terme du numéraire puisqu'il est composé uniquement de numéraire.
10. W est stable pour l'addition et la multiplication par un réel: Soient X, Y $\in$ W et soient a, b $\in \mathbb{R}$. On veut montrer que a X + b Y $\in$ W c'est à dire qu'il existe H tel que $G^* \in W$.

Soit $H \equiv a\ H^X + b\ H^Y$ où H^X et H^Y sont tels que $G_X^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n^X \Delta S_n^* = X$ et $G_Y^* \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n^Y \Delta S_n^* = Y$.

$$\begin{aligned} G^* &\equiv \sum_{n=1}^{N} \left(aH_n^X + bH_n^Y \right) \Delta S_n^* \\ &= a\sum_{n=1}^{N} H_n^X \Delta S_n^* + b\sum_{n=1}^{N} H_n^Y \Delta S_n^* \\ &= aX + bY \end{aligned}$$

(iii) W est de dimension finie: En effet, W est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension K.

En appliquant directement le théorème mathématique précédent on obtient que W est fermé.

2. W est convexe: En effet on a montré plus haut que W est stable pour l'addition et la multiplication par un réel. Il suffit alors de poser a $\in$ [0, 1] et b $\equiv$ (1 - a).
3. A^+ convexe: Soient X, Y $\in A^+$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que λ X + (1 - λ) Y $\in A^+$.

On a λ X + (1 - λ) Y $\in \mathbb{R}_+^K/\{0\}$ puisque X $\in \mathbb{R}_+^K/\{0\}$, Y $\in \mathbb{R}_+^K/\{0\}$ et que $\lambda > 0$ ou (1 - λ) > 0. De plus, $E_P(\lambda X+(1-\lambda)Y)=\lambda E_P X+(1-\lambda)E_P Y=\lambda 1+(1-\lambda)1=1$.

4. A^+ est compact:

a) $A^+ \neq \varnothing$. En effet, $Y_{(k)}=\left(0,\ldots,0,1/P(\omega_k),0,\ldots,0\right)\in A^+$.

b) A^+ fermé. Soit la suite convergente $(X^t)_t$ telle que $X^t \equiv \left(X_1^t,\ldots,X_K^t\right)\xrightarrow[t\to\infty]{} X\equiv\left(X_1^t,\ldots,X_K^t\right)$ où $X^t\equiv\left(X_1^t,\ldots,X_K^t\right)\in A^+$ pour tout t $\in \mathbb{N}$. On veut montrer que X $\in A^+$.

On a pour tout k = 1, …, K $X_k^t \xrightarrow[t\to\infty]{} X_k$. Or on sait que la limite d'une suite convergente de réels positifs est positive. D'où pour tout k = 1, …, K $\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, X_k^t \equiv X_k \geq 0$. On a donc $X\in\mathbb{R}_+^K$.

Par ailleurs, $\forall t\in\mathbb{N}, E_P X^t \equiv \sum_{k=1}^{K} P(\omega_k) X_k^t = 1$. Or la limite d'une suite constante converge vers cette constante. D'où $\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, E_P X^t = 1$.

De plus, on sait que le produit d'un réel par une suite convergente est une suite convergente dont la limite est égale au produit de ce réel par la limite de la suite:

$$\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, P(\omega_k) X_k^t = P(\omega_k)\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, X_k^t = P(\omega_k) X_k$$

Par ailleurs, la somme d'un nombre fini de suites convergentes est une suite convergente dont la limite est égale à la somme des limites:

$$\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}} \sum_{k=1}^{K} P(\omega_k) X_k^t = \sum_{k=1}^{K} P(\omega_k) X_k$$

On a donc:

$$1=\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, E_P X^t \equiv \underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}} \sum_{k=1}^{K} P(\omega_k) X_k^t = \sum_{k=1}^{K} P(\omega_k) X_k$$

D'autre part, comme pour tout k = 1, …, K $X_k \geq 0$ et $P(\omega_k) > 0$ il doit y avoir au moins un k tel que $X_k > 0$. En d'autres termes, $X\in\mathbb{R}_+^K/\{0\}$.

On a donc montré que $\underset{t\to\infty}{\mathrm{Lim}}\, X^t = \left(X_1,\ldots,X_K\right)\in A^+$.

c) A^+ borné. On veut montrer qu'il existe **b**, **B** $\in \mathbb{R}^K$ tels que pour tout X $\in A^+$ on ait **b** $\leq$ X $\leq$ **B**.

Posons **b** $\equiv$ **0** et $\mathbf{B} = \left(\frac{1}{P(\omega_1)}, \ldots, \frac{1}{P(\omega_k)}, \ldots, \frac{1}{P(\omega_K)} \right)$.

Nous avons montré que W est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de $\mathbb{R}^K$ et que A^+ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^K$. Par ailleurs, en l'absence d'opportunité d'arbitrage W $\cap$ $A^+ = \varnothing$. En effet, on sait qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage il est impossible de trouver un portefeuille H tel que $\forall \omega \in \Omega, G^*(\omega) \geq 0$ et que $\exists \omega \in \Omega, G^*(\omega) > 0$. Ceci signifie que $W \cap \mathbb{R}_+^K / \{0\} = \varnothing$. Or $A^+ \subset \mathbb{R}_+^K / \{0\}$. D'où W $\cap$ $A^+ = \varnothing$. On peut donc appliquer le théorème de Minkowski c'est-à-dire on sait qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}^K/\{0\}$ et deux nombres réels b_1 et b_2 tels que:

$\forall$ X $\in$ W, $\forall$ Y $\in A^+$ $\beta.X \leq b_1 < b_2 \leq \beta.Y$

Deuxième étape:

Montrons que $\beta \in \mathbb{R}_{++}^K$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe k tel que $\beta_k \leq 0$. On veut montrer une contradiction.

Puisque $0 \in$ W on a

$\beta.0 \leq b_1 < b_2$

D'où $b_1 \geq 0$ et $b_2 > 0$

Soit $Y_{(k)} = \left(0, \ldots, 0, 1/P(\omega_k), 0, \ldots, 0\right) \in A^+$

$\beta.Y_{(k)} = \beta_k / P(\omega_k) \leq 0$

Or $\forall$ Y $\in A^+$ $0 \leq b_1 < b_2 \leq \beta.Y$ c'est à dire que l'on doit avoir pour tout Y $\in A^+$ $\beta.Y > 0$ et nous avons trouvé $Y_{(k)} \in A^+$ tel que $\beta.Y_{(k)} \leq 0$, la contradiction recherchée.

Troisième étape:

Montrons maintenant que $\beta \in W^{\perp} \equiv \left\{ Y \in \mathbb{R}^K : \forall X \in W, Y.X = 0 \right\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\overline{X} \in W$ tel que $\beta.\overline{X} \neq 0$. On veut montrer une contradiction.

On peut donc trouver un réel α_0 tel que $\alpha_0 \left(\beta.\overline{X}\right) \geq b_2$. Or $\left(\alpha_0 \overline{X}\right) \in W$ car W est un sous-espace vectoriel. Par conséquent, on a trouvé $X \equiv \alpha_0 \overline{X} \in W$ tel que $\beta.X \geq b_2 > b_1$ c'est-à-dire encore tel que $\beta.X > b_1$, la contradiction recherchée.

Quatrième étape:

Montrons qu'il existe une mesure de probabilité risque-neutre.

Soit $Q \equiv \dfrac{\beta}{\sum_{k=1}^{K} \beta_k}$.

Q est parfaitement définie car $\sum_{k=1}^{K} \beta_k \neq 0$.

On a pour tout k = 1, …, K $Q\left(\omega_k\right) \equiv \dfrac{\beta_k}{\sum_{k=1}^{K} \beta_k} > 0$.

$$\sum_{k=1}^{K} Q\left(\omega_k\right) \equiv \sum_{k=1}^{K} \frac{\beta_k}{\left(\sum_{k=1}^{K} \beta_k\right)} = 1$$

$$\begin{aligned}
E_Q\left(\Delta S_n^*\right) &\equiv \sum_{k=1}^{K} Q\left(\omega_k\right) \Delta S_n^*\left(1, \omega_k\right) \\
&\equiv \sum_{k=1}^{K} \frac{\beta_k}{\left(\sum_{k=1}^{K} \beta_k\right)} \Delta S_n^*\left(1, \omega_k\right) \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{K} \beta_k\right)} \sum_{k=1}^{K} \beta_k \Delta S_n^*\left(1, \omega_k\right) \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{K} \beta_k\right)} \underbrace{\beta.\Delta S_n^*}_{=0} = 0
\end{aligned}$$

car $\beta \in W^{\perp}$ et $\Delta S_n^* \in W$. En effet, le portefeuille, H = (H_0, 0, …, 0, 1, 0, …, 0) donne un gain exprimé en terme du numéraire de $G^* = \Delta S_n^*$.

$Q \equiv \frac{\beta}{\sum_{k=1}^{K} \beta_k}$ est donc une mesure de probabilité risque-neutre, ce qu'il fallait démontrer.

$\Leftarrow$ Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une mesure de probabilité risque-neutre mais qu'il existe un portefeuille H tel que $G^* \geq 0$ et $E_P G^* > 0$. On veut montrer une contradiction.

Puisque H est tel que $G^* \geq 0$ et $E_P G^* > 0$ on doit avoir également $E_Q G^* > 0$. Or pour tout portefeuille H on doit avoir:

$$\begin{aligned} E_Q G^* &\equiv E_Q\left(\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} H_n E_Q\left(\Delta S_n^*\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car Q est une mesure de probabilité risque-neutre. D'où 0 > 0, la contradiction recherchée.

<u>Autre démonstration de la condition nécessaire:</u>

Soit A la matrice à K+1 lignes et K + 2N colonnes:

$$\underset{(1+K\times 2N+K)}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ \Delta S_1^*(\omega_1) & -\Delta S_1^*(\omega_1) & ... & \Delta S_N^*(\omega_1) & -\Delta S_N^*(\omega_1) & -1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \Delta S_1^*(\omega_K) & -\Delta S_1^*(\omega_K) & ... & \Delta S_N^*(\omega_K) & -\Delta S_N^*(\omega_K) & 0 & ... & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1+K\times 1)}{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \underset{(2N+K\times 1)}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_{2N} \\ x_{2N+1} \\ ... \\ x_{2N+K} \end{pmatrix}$$

<u>**Théorème:**</u>

$x \in \mathbb{R}_+^{K+2N}$ est solution de l'équation A x = b si et seulement si il existe une opportunité d'arbitrage.

<u>Démonstration:</u>

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+^{K+2N}$ solution de l'équation A x = b. On veut montrer qu'il existe une opportunité d'arbitrage.

A x = b peut s'écrire encore:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{K} x_{2N+k} = 1 \\ \sum_{n=1}^{N} \left(x_{2n-1} - x_{2n}\right) \Delta S_n^* \left(\omega_k\right) = x_{2N+k} \text{ où } k = 1, ..., K \end{cases}$$

Posons $H_n \equiv x_{2n-1} - x_{2n}$ où n = 1, …, N. Puisque $x \in \mathbb{R}_+^{K+2N}$ on a donc pour tout k = 1, …, K

$$G^*\left(\omega_k\right) \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* \left(\omega_k\right) = x_{2N+k} \geq 0$$

D'autre part, puisque $\sum_{k=1}^{K} x_{2N+k} = 1$

il existe k = 1, …, K tel que $G^*\left(\omega_k\right) \equiv \sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^* \left(\omega_k\right) = x_{2N+k} > 0$

On a donc trouvé un portefeuille $H \equiv \left(H_0, x_1 - x_2, x_3 - x_4, ..., x_{2N-1} - x_{2N}\right)$, où H_0 est quelconque, tel que pour tout k $G^*\left(\omega_k\right) \geq 0$ et $G^*\left(\omega_k\right) > 0$ pour au moins un état de la nature. C'est donc une opportunité d'arbitrage, ce qu'il fallait démontrer.

$\Leftarrow$ Supposons que H est une opportunité d'arbitrage. On veut montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+^{K+2N}$ tel que A x = b.

H = (H_0, H_1, …, H_N) est tel que G* ≥ 0 et $E_P G^* > 0$. Par conséquent:

$$\sum_{k=1}^{K} G^*\left(\omega_k\right) > 0$$

On peut donc trouver $\lambda > 0$ tel que $\lambda \left(\sum_{k=1}^{K} G^*\left(\omega_k\right) \right) = 1$.

Si pour tout n = 1, …, N on a:

Si $H_n = 0$ on pose $x_{2n} \equiv 0 \equiv x_{2n-1}$

Si $H_n > 0$ on pose $x_{2n} \equiv 0$ et $x_{2n-1} \equiv \lambda H_n$

Si $H_n < 0$ on pose $x_{2n} \equiv - \lambda H_n$ et $x_{2n-1} \equiv 0$

On a bien $x_n \geq 0$ pour tout n = 1, …, N car $\lambda > 0$.

De plus définissons:

On a pour tout k = 1, …, K:

$$\begin{aligned} x_{2N+k} &\equiv \sum_{n=1}^{N}\left(x_{2n-1}-x_{2n}\right)\Delta S_n^*\left(\omega_k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\lambda H_n \Delta S_n^*\left(\omega_k\right) \\ &= \lambda\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\left(\omega_k\right) \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc également $x_{2N+k} \geq 0$ pour k = 1, …, K. D'où $x \in \mathbb{R}_+^{K+2N}$.

Montrons de plus que x ainsi défini est tel que A x = b:

$$\underset{(2N+K\times 1)}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{2N-1} \\ x_{2N} \\ x_{2N+1} \\ \ldots \\ x_{2N+K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{2N-1} \\ x_{2N} \\ \lambda\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\left(\omega_1\right) \\ \ldots \\ \lambda\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\left(\omega_K\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{1.}x &= \sum_{n=1}^{N} 0\times x_{2n} + \sum_{k=1}^{K}\left(1\times\lambda\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\left(\omega_k\right)\right) \\ &= \lambda\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\left(\omega_k\right) = 1 \end{aligned}$$

D'autre part pour k = 1, …, K:

$$A_{k.}.x = \sum_{n=1}^{N}\left(x_{2n-1}-x_{2n}\right)\times\Delta S_n^*\left(\omega_k\right) - \lambda\sum_{n=1}^{N} H_n \Delta S_n^*\left(\omega_k\right) = 0$$

Lemme de FARKAS:

Etant donné une matrice $\underset{(m\times n)}{A}$ et un vecteur colonne $\underset{(m\times 1)}{b}$ alors:

Ou bien il existe $\underset{(n\times 1)}{x} \geq 0$ tel que A x = b

Ou bien il existe $\underset{(1\times n)}{y}$ tel que y A ≤ 0 et y b > 0

Mais pas les deux simultanément.

Démonstration de la condition nécessaire de la proposition 1.13:

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. On veut montrer qu'il existe une mesure de probabilité risque-neutre.

On sait alors qu'il n'existe pas $\underset{((2N+K)\times 1)}{x} \geq 0$ tel que A x = b. Par conséquent, d'après le lemme de FARKAS il existe $\underset{(1\times 1+K)}{y}$ tel que y A ≤ 0 et y b > 0. Puisque y A ≤ 0 on a pour tout n = 1, …, N

$$\sum_{k=1}^{K} y_k \Delta S_n^* \left(\omega_k\right) \leq 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_k \left(-\Delta S_n^* \left(\omega_k\right)\right) \leq 0$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_k \Delta S_n^* \left(\omega_k\right) = 0$$

De plus, on a également (toujours d'après y A ≤ 0) pour tout k = 1, …, K

$y_0 - y_k \leq 0$

De plus, y b > 0 ⇔ $y_0 > 0$

On a donc pour tout k

$y_k \geq y_0 > 0$

Posons $Q\left(\omega_k\right) \equiv \frac{y_k}{\sum_{k=1}^{K} y_k}$. Montrons que $Q \equiv \frac{y}{\left(\sum_{k=1}^{K} y_k\right)}$ est une mesure de probabilité risque-neutre:

Q est parfaitement définie car $\sum_{k=1}^{K} y_k \neq 0$.

On a pour tout k = 1, …, K $Q\left(\omega_k\right) \equiv \frac{y_k}{\sum_{k=1}^{K} y_k} > 0$.

$$\sum_{k=1}^{K} Q\left(\omega_k\right) \equiv \sum_{k=1}^{K} \frac{y_k}{\left(\sum_{k=1}^{K} y_k\right)} = 1$$

$$
\begin{aligned}
E_Q\left(\Delta S_n^*\right) &\equiv \sum_{k=1}^{K} Q\left(\omega_k\right)\Delta S_n^*\left(\omega_k\right) \\
&\equiv \sum_{k=1}^{K} \frac{y_k}{\left(\sum_{k=1}^{K} y_k\right)} \Delta S_n^*\left(\omega_k\right) \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{K} y_k\right)} \underbrace{\sum_{k=1}^{K} y_k \Delta S_n^*\left(\omega_k\right)}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$Q \equiv \dfrac{y}{\left(\sum_{k=1}^{K} y_k\right)}$ est donc une mesure de probabilité risque-neutre, ce qu'il fallait démontrer.

1-4 Evaluation des droits conditionnels

Un droit conditionnel est une variable aléatoire X représentant un paiement à la date $t=1$. Les droits conditionnels font l'objet d'un contrat entre un vendeur et un acheteur en $t=0$. Le vendeur promet à l'acheteur de lui payer $X(\omega)$ en $t=1$ si l'état de la nature est $\omega \in \Omega$. Le problème est de déterminer le "juste prix" que l'acheteur doit payer au vendeur en $t=0$. Très souvent, la théorie de l'arbitrage permet d'évaluer de façon correcte et unique, le prix des droits conditionnels. De plus, cette évaluation ne dépend pas des préférences des agents qui achètent et vendent ce droit.

Définition :
Un droit conditionnel X est réalisable si et seulement s'il existe un portefeuille H, tel que $V_1 = X$. On dit encore que H permet d'atteindre X.

Soit X un droit conditionnel réalisable. A quel prix p doit-on vendre en t=0 le droit conditionnel X ? On admettra le principe suivant:

Définition (Principe d'évaluation):
On appelle, lorsque la loi du prix unique est vérifiée, le "juste prix" en $t=0$ d'un droit conditionnel réalisable X la valeur p donnée par la formule :

$$p = V_0 \equiv H_0\, B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n\, S_n\left(0\right)$$

où V est le coût d'un portefeuille H qui permet de réaliser X.

On peut justifier ce principe d'évaluation par les observations suivantes:
Si en $t=0$, le prix p de X est tel que $p > V_0$ alors un investisseur peut faire un profit sans risque de p – V_0 en vendant le droit conditionnel (au prix p) et en achetant le portefeuille H (au prix V_0). Le profit est sans risque car à la date $t=1$, la valeur du portefeuille H est égale à V_1 qui est exactement égal à l'obligation X du droit conditionnel.

Si en $t=0$, on a $p<V_0$ alors un investisseur peut faire un profit sans risque de $V_0-p>0$ en achetant le droit conditionnel X (au prix p) grâce à l'argent rapporté par la vente du portefeuille H (soit V_0).
Si $p=V_0$, alors on ne peut utiliser le portefeuille H pour réaliser un profit sans risque. Il ne s'en suit pas que V_0 est la valeur correcte de X. En effet, si il existe un autre portefeuille $\hat{H}$ tel que $\hat{V}_1=X$ mais $\hat{V}_0\neq V_0$ alors il serait possible de réaliser un profit sans risque $\left|\hat{V}_0-p\right|=\left|\hat{V}_0-V_0\right|>0$. Le problème ici, c'est que la loi du prix unique n'est pas vérifiée. Par conséquent, pour que V_0 soit le prix correct de X il est nécessaire que la loi du prix unique soit vérifiée.
On sait qu'en l'absence d'opportunités d'arbitrage il n'y a pas de portefeuille dominant et s'il n'existe pas de portefeuille dominant alors la loi du prix unique est vérifiée. On a alors la proposition suivante:

Proposition 17:
Si Q est une mesure de probabilité risque-neutre quelconque alors pour tout portefeuille H on a :

$$V_0^* = E_Q\left[V_1^*\right]$$

ou encore

$$E_Q\left[G^*\right]=0$$

En d'autre termes, sous la mesure de probabilité Q, la valeur actualisée à la date 1 de n'importe quel portefeuille est égale à sa valeur initiale.

Démonstration :

$$V_0^*=E_Q\left[V_0^*\right]=E_Q\left[V_1^*-G^*\right]=E_Q V_1^*-E_Q\left[\sum_{n=1}^{N}H_n\Delta S_n^*\right]$$

$$=E_Q V_1^*-\sum_{n=1}^{N}H_n \underbrace{E_Q\left[\Delta S_n^*\right]}_{\substack{=\ 0 \text{ car Q} \\ \text{est risque-neutre}}}=E_Q V_1^*=E_Q\left[V_1/B_1\right]$$

Autre Démonstration :
La proposition 1.14 est vraie par définition pour n'importe qu'elle mesure linéaire d'évaluation Π c'est à dire que l'on a par définition d'une mesure linéaire d'évaluation Π pour tout portefeuille H:

$$V_0^* = \sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)V_1^*(\omega)$$

Il suffit alors d'observer qu'une mesure de probabilité risque-neutre est une mesure linéaire d'évaluation

Vérification:
Supposons K = 3, N = 1, r = 1/9, S_0 = 5, $S_1(\omega_1)$ = 20/3, $S_1(\omega_2)$ = 40/9, $S_1(\omega_3)$ = 30/9.
L'ensemble des mesures de probabilités risque-neutre est donné par:

$$M=\left\{Q=\left(\frac{1+\lambda}{2},\frac{1-3\lambda}{2},\lambda\right) \text{ où } 0<\lambda<1/3\right\}$$

$$G^*(\omega) = H_1 \Delta S_1^*(\omega) = \begin{vmatrix} H_1 & \text{si } \omega_1 \\ -H_1 & \text{si } \omega_2 \\ -2H_1 & \text{si } \omega_3 \end{vmatrix}$$

$$E_Q[G*] = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right) \times H_1 + \left(\frac{1-3\lambda}{2}\right) \times (-H_1) + \lambda \times (-2H_1)$$
$$= \lambda\left(\frac{H_1 + 3H_1}{2} - 2H_1\right) + \left(\frac{H_1 - H_1}{2}\right) = 0$$

On déduit de cette proposition que s’il existe une probabilité strictement positive que la valeur du portefeuille augmente, il existe également une probabilité positive que la valeur du portefeuille diminue. En effet, on a $E_Q[G*] = 0$. Par conséquent, il n’existe pas de portefeuille dominant.

Il est impossible également de trouver deux portefeuilles H et $\hat{H}$ tel que $V_1 = \hat{V}_1$ et $V_0 \neq \hat{V}_0$ de telle sorte que la loi du prix unique est vérifiée. En effet, on a

$V_0 = E_Q[V_1/B_1] = E_Q\left[\hat{V}_1/B_1\right] = \hat{V}_0$.

On retrouve ici les résultats suivant lesquels en l'absence d'opportunité d'arbitrage (on sait en effet, proposition 1.13, que lorsqu'il existe une mesure de probabilité risque-neutre il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage) il n'y a pas de portefeuille dominant (proposition 1.10) et la loi du prix unique est vérifiée (proposition 1.8).

Proposition 18:

En l’absence d’opportunités d’arbitrage, la valeur p en $t = 0$ d’un droit conditionnel réalisable X est donnée par :

$$p = E_Q[X/B_1]$$

où Q est une mesure de probabilité risque neutre quelconque.

Démonstration:

On sait qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage la loi du prix unique est vérifiée. D'après le principe d'évaluation on a:

$p = V_0$

où V_0 est le coût en t = 0 d'un portefeuille dont la valeur en t = 1 est V_1 = X.

Si Q est une mesure de probabilité risque-neutre quelconque alors pour tout portefeuille H on a :

$$V_0 = E_Q[V_1 / B_1]$$

D'où:

$p = E_Q[V_1 / B_1] = E_Q[X / B_1]$

Notons que la proposition 1.15 peut se généraliser au cas d'absence de portefeuille dominant. La proposition 1.15 se déduit alors comme un corollaire de la proposition suivante (puisque Q est une mesure linéaire d'évaluation).

Proposition 19:
S'il n'existe pas de portefeuille dominant alors la valeur p en $t=0$ d'un droit conditionnel réalisable X est donnée par :

$$p = E_\pi[X/B_1]$$

où π est une mesure linéaire d'évaluation quelconque.

Démonstration:
On sait en effet qu'en l'absence de portefeuille dominant la loi du prix unique est vérifiée et qu'il existe une mesure linéaire d'évaluation. Si π est une mesure linéaire d'évaluation quelconque alors pour tout portefeuille H on a :

$$V_0 = E_\pi[V_1/B_1]$$

D'où:

$$p = E_\pi[V_1/B_1] = E_\pi[X/B_1]$$

Exemple : p.18-21

1-5 Marchés complets et incomplets

On ne peut utiliser la méthode d'évaluation précédente lorsque le droit conditionnel X n'est pas réalisable.

Définition :
On dit que les marchés sont complets si tout droit conditionnel X peut être dupliqué par un portefeuille:

$$\forall X \in \mathbb{R}^K, \exists H \in \mathbb{R}^{N+1}, V_1 = X$$

Dans le cas contraire on dit que les marchés sont incomplets.

Proposition 20:
Les marchés sont complets si et seulement si le nombre d'états de la nature est égal au nombre de vecteurs indépendants dans $\{B_1, S_1(1), \ldots, S_N(1)\}$.

Démonstration :
Les marchés sont complets si le système d'équation $AH = X$ possède une solution H pour tout X, où :

$$A = \begin{bmatrix} B_1(\omega_1) & S_1(1,\omega_1) & \ldots & S_N(1,\omega_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_1(\omega_K) & S_1(1,\omega_K) & \ldots & S_N(1,\omega_K) \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \dots \\ H_N \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_K \end{pmatrix}$$

D'après un résultat d'algèbre linéaire, on sait que ceci sera vrai si et seulement si la matrice A a pour rang K c'est-à-dire si cette matrice a K colonnes indépendantes.

cf exemples p.22

<u>Proposition 21:</u>
Supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage alors:
Le droit conditionnel X est réalisable si et seulement si $E_Q[X/B_1]$ prend la même valeur pour toute mesure de probabilités risque neutre $Q \in M$.

<u>Démonstration</u> :
$\Rightarrow$ Supposons X réalisable. On veut montrer que $E_Q[X/B_1] = cste \quad \forall Q \in M$ (supposé non vide). En effet, on a :

$$\forall Q \in M, E_Q[X/B_1] = V_0 = cste$$

où V_0 est la valeur initiale d'un portefeuille permettant d'atteindre X.

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall Q \in M, E_Q[X/B_1] = cste$. On veut montrer que X est réalisable. On peut montrer de manière équivalente la contraposée c'est-à-dire, on suppose que X n'est pas réalisable et on montre que $E_Q[X/B_1] \neq cste$. Plus spécifiquement, nous allons montrer qu'il existe deux mesures de probabilité risque-neutre $\hat{Q}$ et Q telles que $E_{\hat{Q}}[X/B_1] \neq E_Q[X/B_1]$.
Puisque X n'est pas réalisable alors le système d'équations $AH = X$ n'a pas de solution. Il s'en suit d'après le lemme de Farkas $\exists \Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_K)$ tel que :

$$\Pi A = 0$$
$$\Pi X > 0$$

Soit $\hat{Q} \in M$ et soit Q définie par :

$$Q(\omega_k) \equiv \hat{Q}(\omega_k) + \lambda \Pi_k B_1(\omega_k)$$

où $\lambda > 0$.
Montrons que Q est une mesure de probabilité risque neutre :
Puisque $\hat{Q} \in M$, on a $\hat{Q}(\omega_k) > 0 \quad \forall k = 1,...,K$. Par conséquent si $\Pi_k B_1(\omega_k) < 0$ et que l'on choisit λ suffisamment proche de zéro on aura $Q(\omega_k) > 0$. Si $\Pi_k B_1(\omega_k) \geq 0$ alors $\forall \lambda > 0$ on a $Q(\omega_k) > 0$.

De plus, $\sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{K} \hat{Q}(\omega_k)}_{=1 \text{ car } \hat{Q} \in M} + \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{K} \Pi_k B_1(\omega_k)}_{=0 \text{ car } \Pi A = 0}$

Par conséquent, Q est une mesure de probabilité qui donne une probabilité strictement positive à chaque état.

$$E_Q S_n^*(1) = \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k)\left[S_n(1,\omega_k)/B_1(\omega_k)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{K}\left(\hat{Q}(w_k) + \Pi_k B_1(w_k)\right)\left[S_n(1,w_k)/B_1(w_k)\right]$$
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{K}\hat{Q}(\omega_k)\left[S_n(1,\omega_k)/B_1(\omega_k)\right]}_{S_n^*(0)\,\text{car}\, Q\in M} + \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{K}\Pi_k S_n(1,\omega_k)}_{=0\,\text{car}\,\Pi A=0}$$

$$E_Q S_n^*(1) = S_n^*(0) \quad \forall n = 1,\dots,N$$

Il reste à montrer que $E_Q[X/B_1] \neq E_{\hat{Q}}[X/B_1]$:

$$E_Q[X/B_1] = \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k)\left[X(\omega_k)/B_1(\omega_k)\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{K}\hat{Q}(\omega_k)\left[X(\omega_k)/B_1(\omega_k)\right] + \lambda \overbrace{\sum_{k=1}^{K}\Pi_k X(\omega_k)}^{>0\,\text{car}\,\Pi X>0}$$

$$E_Q[X/B_1] = E_{\hat{Q}}[X/B_1] + \underbrace{\delta}_{>0}$$
$$\Rightarrow E_Q[X/B_1] \neq E_{\hat{Q}}[X/B_1]$$

D'après la proposition 1.17 les marchés sont complets si et seulement si le de la matrice des paiements des actifs financiers est égal au nombre d'états de la nature. Ce résultat reste vrai qu'il y ait des opportunités d'arbitrage ou non. Dans le cas d'absence d'opportunités d'arbitrage il existe une façon plus simple de caractériser la complétude des marchés:

Notons que la condition suffisante de la proposition 1.18 se transpose aisément au cas d'absence de portefeuille dominant mais pas la condition nécessaire.

Proposition 22:
Supposons qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage alors:
Les marchés sont complets si et seulement si M contient exactement une seule mesure de probabilité risque neutre.

Démonstration :
$\Rightarrow$ Raisonnons par l'absurde et supposons que tout droit conditionnel X est réalisable mais que M n'est pas un singleton. Puisqu'il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage $M \neq \emptyset$. Par conséquent M doit contenir au moins deux mesures distinctes de probabilité risque neutre Q et $\hat{Q}$. On veut montrer une contradiction :
Puisque Q et $\hat{Q}$ sont distinctes

$$\exists \omega_k \in \Omega,\ Q(\omega_k) \neq \hat{Q}(\omega_k)$$

Soit X tel que :

$$X(\omega)=\begin{cases} B_1(\omega_k) \text{ si } \omega=\omega_k \\ 0 \quad \text{ si } \omega\neq\omega_k \end{cases}$$

X est réalisable puisque nous somme par hypothèse dans le cadre des marchés complets.

$$E_Q[X/B_1]=Q(\omega_k)\neq\hat{Q}(\omega_k)=E_{\hat{Q}}[X/B_1]$$

Or, on sait d'après la proposition précédente que si X est réalisable alors $\forall Q \in M, E_Q[X/B_1]=cste$: contradiction, on a trouvé un X réalisable (puisque tout X est réalisable) qui est valorisé différemment suivant que l'on prenne l'une ou l'autre des mesures de M.

$\Leftarrow$ Supposons que M soit un singleton. On veut montrer que l'on peut atteindre tout X.
En effet, $\forall X\in \mathbb{R}^K, E_Q[X/B_1]=cste$ pour tout Q $\in$ M (puisque Q est unique). D'après la proposition précédente on voit que X est réalisable.

Dans le cas des droits contingents que l'on ne peut dupliquer avec un portefeuille, il est possible d'identifier un intervalle à l'intérieur duquel le juste prix doit se situer. Soit un droit conditionnel X non réalisable. Comment valoriser X ?

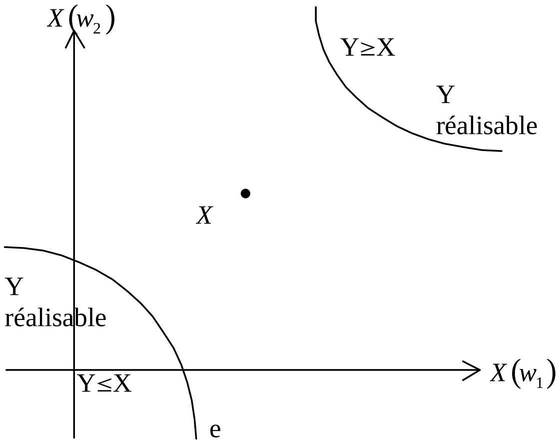
<u>Proposition 23</u>:
Supposons qu'il n'y ait pas d'opportunités d'arbitrage. Le juste prix de X est compris entre la borne supérieure de D et la borne inférieure de C : $V_-(\mathbf{X})\leq p \leq V_+(\mathbf{X})$ où $V_-(X)$ et $V_+(X)$ sont définis par :

$$V_-(\mathbf{X})\equiv Max\left\{v\in \mathbb{R} : \exists \mathbf{H}\in \mathbb{R}^{N+1}, v=V_0 \text{ et } V_1\leq \mathbf{X}\right\}$$

$$V_+(\mathbf{X})\equiv Min\left\{v\in \mathbb{R} : \exists \mathbf{H}\in \mathbb{R}^{N+1}, v=V_0 \text{ et } V_1\geq \mathbf{X}\right\}$$

<u>Démonstration</u> :
La démonstration procède en plusieurs étapes. Dans la première étape, on montre que $V_+(X)$ et $V_-(X)$ sont parfaitement définis. Puis on démontre la proposition.

<u>Première étape :</u>



Soit $C = \{v \in \mathbb{R} : v = E_Q[Y/B_1] \text{ où Y est réalisable et } Y \geq \mathbf{X}\}$ où Q est une mesure de probabilité risque-neutre quelconque. En effet, puisque Y est réalisable on a pour tout Q ∈ M, $E_Q[Y/B_1] = cste$. L'ensemble C ne dépend donc pas de la mesure de probabilité risque-neutre choisie. $E_Q[Y/B_1]$ est le prix du portefeuille qui rapporte Y. On a donc

$$C = \{v \in \mathbb{R} : v = E_Q[Y/B_1] \text{ où Y est atteignable et } Y \geq \mathbf{X}\}$$
$$= \{v \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N+1}, v = V_0 \text{ et } V_1 \leq \mathbf{X}\}$$

Soit $V_+(X) \equiv \inf\left\{\overbrace{E_Q[X/B_1]}^{=v} : Y \geq X \text{ et } Y \text{ atteignable}\right\}$. On a encore $V_+(X) \equiv \inf C$ c'est-à-dire que $\forall\, v \in C$ on a $v \geq V_+(X)$.

On veut montrer que $V_+(X)$ existe :

- $C \neq \varnothing$

En effet, λB_1 est réalisable par le portefeuille $(\lambda, 0, \ldots, 0)$. D'autre part, puisque $\forall \omega \in \Omega, B_1(w) > 0$ il existe λ tel que $\forall \omega \in \Omega, \lambda B_1(\omega) \geq X(\omega)$. Enfin $E_Q[\lambda B_1/B_1] = \lambda$:

$$\lambda \in C$$

- C admet un minorant

En effet, pour $Q \in M$ donné, on a pour tout Y réalisable et Y ≥ X

$$E_Q[X/B_1] < E_Q[Y/B_1] = v \in C$$
$$\Rightarrow \forall v \in C, E_Q[X/B_1] \leq v$$

- On sait d'après l'axiome de continuité des réels que tout sous ensemble de $\mathfrak{R}$ non vide et minoré admet une borne inférieure. C admet donc une borne inférieure notée $V_+(X)$.

Soit $V_-(X) \equiv \sup\{v \in \mathbb{R} : v = E_Q[Y/B_1] \text{ où } Y \leq X, Y \text{ atteignable}\}$. On veut montrer que $V_-(X)$ est défini :

Soit $D \equiv \{v \in \mathbb{R} : v = E_Q[Y/B_1] \text{ où } Y \leq X \text{ et } Y \text{ atteignable}\}$

- D est non vide

En effet, λB_1 est réalisable par le portefeuille $(\lambda, 0, \dots, 0)$. D'autre part, puisque $\forall \omega \in \Omega, B_1(w) > 0$ il existe λ tel que $\forall \omega \in \Omega, \lambda B_1(\omega) \leq X(\omega)$. Enfin $E_Q[\lambda B_1 / B_1] = \lambda$:

$\lambda \in D$

- D admet un majorant

En effet, pour $Q \in M$ donné, on a pour tout Y réalisable et $Y \leq X$

$$E_Q[X/B_1] > E_Q[Y/B_1] = v \in C$$

$$\Rightarrow \forall v \in C, E_Q[X/B_1] \geq v$$

Deuxième étape :

Raisonnons par l'absurde et supposons que $p > V_+(X)$ ou que $p < V_-(X)$. On veut montrer une contradiction.

Supposons dans un premier temps que p > V_+(**X**), alors il suffit de vendre **X** et d'acheter le moins cher des portefeuilles tel que $V_1 \geq \mathbf{X}$. Un tel portefeuille coûte V_+(**X**). En t = 0 on a donc une rentrée d'argent : p - V_+(**X**) > 0. En t = 1, on devra rembourser **X** ce que l'on pourra faire puisque l'on a acheté un portefeuille qui rapporte toujours, et même quelques fois strictement plus, au moins **X**. Au total la stratégie a permis de réaliser sans risque un profit strictement positif en t = 0 et positif ou nul en t = 1 : c'est une opportunité d'arbitrage et c'est en contradiction avec l'existence d'une mesure de probabilité risque-neutre, la contradiction recherchée.

Si p < V_-(**X**), alors il suffit d'acheter **X** et de vendre le plus cher des portefeuilles tel que $V_1 \leq \mathbf{X}$. Un tel portefeuille coûte V_-(**X**). En t = 0 on a donc une rentrée d'argent : V_-(**X**) - p > 0. En t = 1, on devra rembourser V_1 ce que l'on pourra faire puisque l'on a acheté un droit conditionnel qui rapporte toujours, et même quelques fois strictement plus, au moins V_1. Ce serait donc une opportunité d'arbitrage.

Proposition 24: si $M \neq \emptyset$ alors pour tout droit conditionnel X on a :

$$V_+(X) = \sup_{Q \in M} E_Q[X/B_1]$$

$$V_-(X) = \inf_{Q \in M} E_Q[X/B_1]$$

De plus, X est réalisable alors $V_+(X) = V_-(X) = p$.

Démonstration :

Soit le programme suivant :

$$\min_{\lambda, Y, U} \lambda$$

s.c. $\quad Y \geq X$

(I) $\quad U - Y / B_1 = 0$

$\quad \lambda - U \cdot Q_1 = 0$

$\quad \dots$

$\lambda - U \cdot Q_J = 0$

$\lambda \in IR$

où $Y \in IR^K$

$U \in IR^K$

On veut montrer que si une solution à ce programme existe alors la valeur de la fonction objectif $\lambda^* = V_+(X)$. En effet, le programme signifie que parmi tous les droits réalisables *Y* tels que $Y \geq X$ on choisit celui dont la valeur est la plus faible :

En effet, Y est réalisable car d'après les contraintes du programme I on a :

$UQ_j - \lambda = 0 \Leftrightarrow E_{Q_j}[Y/B_1] = \lambda \quad cste \quad \forall j$

ce qui implique que $\forall Q \in M$ on a $E_Q[Y/B_1] = \text{constante}$

En effet, puisque $(Q_1, \ldots, Q_J)$ est une base de *M*, $Q = \sum_{k=1}^{J} \alpha_j Q_j$.

Si un tel Y^* existe alors $E_Q[Y^*/B_1] = \lambda^*$ est la borne inférieure de *C* (puisque c'est le minimum de *C*).

Notons qu'une solution à ce programme linéaire existe par ce que la région faisable est non vide et que la fonction objectif est bornée inférieurement.

Soit le programme dual :

$$\underset{\theta,\Psi}{Max} \sum_{k=1}^{K} \left[X(\omega_k) / B_1(\omega_k) \right] \Psi_k$$

s.c. $\theta_1 + \ldots + \theta_J = 1$

$\Psi_1 - Q_1(\omega_1)\theta_1 - \ldots - Q_J(\omega_1)\theta_J = 0$

$\ldots$

(II) $\Psi_K - Q_1(\omega_K)\theta_1 - \ldots - Q_J(\omega_K)\theta_J = 0$

$\Psi \geq 0$

où $\theta \in IR^J$ et $\Psi \in IR^K$

Montrons que Ψ est une mesure de probabilité, soit (Ψ, θ) un couple faisable :

$$\Psi = Q_1\theta_1 + \ldots + Q_J\theta_J \geq 0$$

$$\Psi \cdot e = \underbrace{Q_1 \cdot e}_{=1}\theta_1 + \ldots + \underbrace{Q_J \cdot e}_{=1}\theta_J = \theta_1 + \ldots + \theta_J = 1$$

Montrons que Ψ est une mesure d'évaluation linéaire (mais pas nécessairement risque neutre car la probabilité de certains états de la nature peut être nulle) :

$$E_\Psi\left[\Delta S_n^*\right] = \Psi \cdot \Delta S_n^* = \left(Q_1\theta_1 + \ldots + Q_J\theta_J\right) \cdot \Delta S_n^*$$

$$= \theta_1 \underbrace{Q_1 \cdot \Delta S_n^*}_{\substack{=0 \ car\, Q_J\, est \\ risque\, neutre}} + \ldots + \theta_J \underbrace{Q_J \cdot \Delta S_n^*}_{\substack{=0 \ car\, Q_J\, est \\ risque\, neutre}}$$

$$\forall n = 1, \ldots, N \quad E_\Psi\left[\Delta S_n^*\right] = 0$$

La région faisable peut être interprétée comme la fermeture de M. Cela implique que la valeur à l'optimum de la fonction objectif du programme II est égale à $\sup_{Q \in M} E_Q\left[X/B_1\right]$.

Puisque les programmes (I) et (II) sont duaux, les programmes sont simultanément faisable et les valeurs des fonctions objectifs sont égales :

$$\lambda^* = \sup_{Q \in M} E_Q\left[X/B_1\right]$$

et comme $V_+(X) = \lambda^*$ on a bien :

$$V_+(X)\lambda^* = \sup_{Q \in M} E_Q\left[X/B_1\right]$$

De même les programmes :

$$\begin{array}{lll} & \underset{\lambda,Y,U}{Max}\,\lambda & \\ & \text{s.c.} & Y \leq X \\ \text{(I')} & & U - Y / B_1 = 0 \\ & & \lambda - U\,Q_1 = 0 \\ & & \ldots. \\ & & \lambda - U\,Q_J = 0 \end{array}$$

où :

$\lambda \in IR$

$Y \in IR^K$

$U \in IR^K$

$$\underset{\theta,\Psi}{Min} \sum_{k=1}^{K} \left[X(w_k)/B_1(w_k)\right]\Psi_k$$

$$\begin{array}{ll} \text{s.c.} & \theta_1 + \ldots + \theta_J = 1 \\ & \Psi_1 - Q_1(w_1)\theta_1 + \ldots + Q_J(w_1)\theta_J = 0 \\ \text{(II')} & \Psi_K - Q_1(w_K)\theta_1 + \ldots + Q_J(w_K)\theta_J = 0 \\ & \Psi \geq 0 \end{array}$$

où $\theta \in IR^J$ et $\Psi \in IR^K$

$$\Rightarrow \lambda^{**} = V_-(X) = \inf_{Q \in M} E_Q\left[X/B_1\right]$$

<u>Exemple :</u>

K = 3 N = 1 $r = 1/9$ $S_0 = 5$

$$S_1(\omega_1) = \frac{20}{3} \qquad S_1(\omega_2) = \frac{40}{9} \qquad S_1(\omega_3) = \frac{10}{3}$$

$$\mathrm{M}=\left\{\mathrm{Q}\in \mathbb{R}^3_{++} : \mathrm{Q}=\left(\lambda, 2-3\lambda, -1+2\lambda\right) \text{ où } \frac{1}{2}<\lambda<\frac{2}{3}\right\}$$

Soit $X=(30,20,10)$ un droit conditionnel qu'on ne peut atteindre :

$$\begin{pmatrix} 10/9 & 20/3 \\ 10/9 & 40/9 \\ 10/9 & 10/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_0 \\ \\ H_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

X est réalisable si et seulement si **X** solution de $X_1-3X_2+2X_3=0$, or $30-3\times 20+2\times 10=-10\neq 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E_Q}\left[\mathrm{X/B_1}\right]&=\lambda\underbrace{\frac{30}{10/9}}_{27}+(2-3\lambda)\times\underbrace{\frac{20}{10/9}}_{18}\times(-1+2\lambda)\times\underbrace{\frac{10}{10/9}}_{9}\\ &=27\lambda+18(2-3\lambda)+9(-1+2\lambda)\\ &=27-9\lambda\end{aligned}$$

Or, $\quad V_+(X)=\sup_{Q\in M} E_Q\left[X/B_1\right]=\sup_{\frac{1}{2}<\lambda<\frac{2}{3}} 27-9\lambda=27-\frac{9}{2}=22{,}5$

$$V_-(X)=\inf E_Q\left[X/B_1\right]=\sup_{\frac{1}{2}<\lambda<\frac{2}{3}} 27-9\lambda=27-\frac{9}{2}\times\frac{2}{3}=21$$

Le juste prix p de $X=(30,20,10)$ est donc compris entre 21.5 ≥ p ≥ 21

<u>Autre méthode :</u>

$$\underset{\mathrm{H_0,H_1}}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{V_0}=\mathrm{H_0}+5\mathrm{H_1}$$

$$\frac{10}{9}\mathrm{H_0}+\frac{20}{3}\mathrm{H_1}\leq 30$$

$$\frac{10}{9}\mathrm{H_0}+\frac{40}{9}\mathrm{H_1}\leq 20$$

$$\frac{10}{9}\mathrm{H_0}+\frac{30}{9}\mathrm{H_1}\leq 10$$

$$\underset{\mathrm{H_0,H_1}}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{L}=\mathrm{H_0}+5\mathrm{H_1}+\alpha\left(30-\frac{10}{9}\mathrm{H_0}-\frac{20}{3}\mathrm{H_1}\right)+\beta\left(20-\frac{10}{9}\mathrm{H_0}-\frac{40}{9}\mathrm{H_1}\right)+\gamma\left(10-\frac{10}{9}\mathrm{H_0}-\frac{30}{9}\mathrm{H_1}\right)$$

$$\begin{cases} 1-\dfrac{10}{9}(\alpha+\beta+\gamma)=0 \\ 5-\left(\dfrac{20}{3}\alpha-\dfrac{40}{9}\beta-\dfrac{30}{9}\gamma\right)=0 \\ \alpha\left(30-\dfrac{10}{9}H_0-\dfrac{20}{3}H_1\right)=0 \\ \beta\left(20-\dfrac{10}{9}H_0-\dfrac{40}{9}H_1\right)=0 \\ \gamma\left(10-\dfrac{10}{9}H_0-\dfrac{30}{9}H_1\right)=0 \\ \alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{7}{10}+\dfrac{\gamma}{2} \\ \beta=\dfrac{2}{10}-\dfrac{3}{2}\gamma \\ 0\leq\gamma\leq\dfrac{2}{15} \end{cases}$$

<u>1er cas :</u>

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{7}{10}>0 \\ \beta=\dfrac{2}{10}>0 \\ \gamma=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30-\dfrac{10}{9}H_0-\dfrac{20}{3}H_1=0 \\ 20-\dfrac{10}{9}H_0-\dfrac{40}{9}H_1=0 \end{cases}$$

$$H=\left(0,\frac{9}{2}\right) \text{ mais } \frac{10}{9}0+\frac{30}{9}\frac{9}{2}=15>10$$

<u>2ème cas</u> :

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{5}{6}>0 \\ \beta=0 \\ \gamma=\dfrac{2}{15}>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30-\frac{10}{9}H_0-\frac{20}{3}H_1=0 \\ 10-\frac{10}{9}H_0-\frac{30}{9}H_1=0 \end{cases}$$

$H=(-9,6)$ et $\frac{10}{9}(-9)+\frac{40}{9}6=\frac{50}{3}<20$

<u>3ème cas</u> :

$$\begin{cases} \alpha=\frac{7}{10}+\frac{\gamma}{2}>0 \\ \beta=\frac{2}{10}-\frac{3}{2}\gamma>0 \\ 0<\gamma<\frac{2}{15} \end{cases}$$

Ce cas n'est pas possible car il implique que les 3 inégalités soient serrées, ce qui est impossible puisque X n'est pas réalisable.

La solution du programme est donc $H=(-9,6)$ et $\underset{H}{\mathrm{Max}}\, V_0=-9+5\times 6=21=V_-(30,20,10)$

$$\underset{H_0,H_1}{\mathrm{Min}}\, V_0=H_0+5H_1$$

$$\frac{10}{9}H_0+\frac{20}{3}H_1\geq 30$$

$$\frac{10}{9}H_0+\frac{40}{9}H_1\geq 20$$

$$\frac{10}{9}H_0+\frac{30}{9}H_1\geq 10$$

$$\underset{H_0,H_1}{\mathrm{Max}}\, L=H_0+5H_1+\alpha\left(30-\frac{10}{9}H_0-\frac{20}{3}H_1\right)+\beta\left(20-\frac{10}{9}H_0-\frac{40}{9}H_1\right)+\gamma\left(10-\frac{10}{9}H_0-\frac{30}{9}H_1\right)$$

$$\begin{cases} 1-\frac{10}{9}(\alpha+\beta+\gamma)=0 \\ 5-\left(\frac{20}{3}\alpha-\frac{40}{9}\beta-\frac{30}{9}\gamma\right)=0 \\ \alpha\left(30-\frac{10}{9}H_0-\frac{20}{3}H_1\right)=0 \\ \beta\left(20-\frac{10}{9}H_0-\frac{40}{9}H_1\right)=0 \\ \gamma\left(10-\frac{10}{9}H_0-\frac{30}{9}H_1\right)=0 \\ \alpha\geq 0,\beta\geq 0,\gamma\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{7}{10} + \frac{\gamma}{2} \\ \beta = \frac{2}{10} - \frac{3}{2}\gamma \\ 0 \le \gamma \le \frac{2}{15} \end{cases}$$

<u>1^{er} cas :</u>

$$\begin{cases} \alpha = \frac{7}{10} > 0 \\ \beta = \frac{2}{10} > 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 - \frac{10}{9} H_0 - \frac{20}{3} H_1 = 0 \\ 20 - \frac{10}{9} H_0 - \frac{40}{9} H_1 = 0 \end{cases}$$

$$H = \left(0, \frac{9}{2}\right) \text{ et } \frac{10}{9} 0 + \frac{30}{9}\frac{9}{2} = 15 > 10$$

$2^{\text{ème}}$ cas :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{5}{6} > 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = \frac{2}{15} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 30 - \frac{10}{9} H_0 - \frac{20}{3} H_1 = 0 \\ 10 - \frac{10}{9} H_0 - \frac{30}{9} H_1 = 0 \end{cases}$$

$$H = (-9, 6) \text{ mais } \frac{10}{9}(-9) + \frac{40}{9} 6 = \frac{50}{3} < 20$$

$3^{\text{ème}}$ cas :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{7}{10} + \frac{\gamma}{2} > 0 \\ \beta = \frac{2}{10} - \frac{3}{2}\gamma > 0 \\ 0 < \gamma < \frac{2}{15} \end{cases}$$

Ce cas n'est pas possible car il implique que les 3 inégalités soient serrées, ce qui est impossible puisque X n'est pas réalisable.

La solution du programme est donc $H = \left(0, \frac{9}{2}\right)$ et $\underset{H}{\mathrm{Min}}\, V_0 = 0 + 5 \times \frac{9}{2} = 22{,}5 = V_+\left(30, 20, 10\right)$

1-6 Rendement et risque

Dans cette section nous allons montrer que la prime de risque d'un portefeuille arbitraire est proportionnelle à la covariance entre un rendement correspondant à la densité des prix d'état et le rendement du portefeuille.

Définition:
Supposons $S_n\left(0\right) > 0$ pour tout n = 1, …, N. Le taux de rendement de l'actif n = 0, 1, …, N est défini par :

$$R_n \equiv \frac{S_n\left(1\right) - S_n\left(0\right)}{S_n\left(0\right)} \quad n = 1, \ldots, N$$

$$R_0 \equiv \frac{B_1 - B_0}{B_0} \text{ (= r lorsque le rendement du compte bancaire est déterministe)}$$

Notons que puisque $\forall\ \omega \in\ \Omega$, $S_n(1)\ (\omega)\ \geq\ 0$ on doit avoir $R_n(w)\ \geq\ -1$ et comme $\forall \omega \in\ \Omega\ \ B_1\left(\omega\right) > 0,\ \ R_0\left(\omega\right) > -1$

Par extension on définit le rendement d'un portefeuille comme le taux de croissance de sa valeur.

Définition:
Supposons $V_0 \neq 0$. Le taux de rendement d'un portefeuille H est donné par:

$$R \equiv \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

où V_t est la valeur du portefeuille H à la date t.

Notons que le rendement du portefeuille composé d'une unité de l'actif n est R_n.

Proposition 25:
Soit H un portefeuille tel que $V_0 \neq 0$. Le taux de rendement du portefeuille est donné par :

$$R = \alpha_0\, R_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\, R_n$$

où $\alpha_0 \equiv \frac{H_0\, B_0}{V_0}$ et $\alpha_n = \frac{H_n\, S_n\left(0\right)}{V_0}$ n = 1, …, N.

α_n est le pourcentage de la valeur du portefeuille investie dans l'actif n :

$$\sum_{n=0}^{N} \alpha_n = 1$$

<u>Démonstration:</u>

Par définition $R \equiv \frac{V_1 - V_0}{V_0} \equiv \frac{\left(H_0 B_1 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(1) \right) - \left(H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) \right)}{V_0}$

$$R = \frac{H_0 (B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^{N} H_n (S_n(1) - S_n(0))}{V_0}$$

$$= \frac{H_0 (R_0 B_0) + \sum_{n=1}^{N} H_n (R_n S_n(0))}{V_0}$$

$$R = \frac{H_0 B_0 R_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0) R_n}{V_0} = \left(\frac{H_0 B_0}{V_0} \right) R_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{H_n S_n(0)}{V_0} \right) R_n$$

<u>Définition:</u>

Supposons $S_n^*(0) > 0$ pour tout n = 1, …, N. Le taux de rendement de l'actif n = 1, …, N exprimé en terme du numéraire est défini par :

$$R_n^* \equiv \frac{S_n^*(1) - S_n^*(0)}{S_n^*(0)} \quad n = 1, \ldots, N$$

C'est le taux de croissance de la valeur de l'actif n exprimé en terme du numéraire.

Notons que le rendement du compte bancaire exprimé en terme du numéraire est nul : $R_0^* \equiv \frac{1-1}{1} = 0$

<u>Proposition 26:</u>

$R_n^* = \frac{(R_n - R_0)}{(1 + R_0)}$ où n = 1, …, N

<u>Démonstration:</u>

$$\Delta S_n^* \equiv S_n^*(1) - S_n^*(0) = \frac{S_n(1) - B_1 (S_n(0)/B_0)}{B_1}$$

$$= \frac{(1+R_n) S_n(0) - (1+R_0) B_0 (S_n(0)/B_0)}{(1+R_0) B_0}$$

$$= \frac{S_n(0)}{B_0} \frac{\left[(1+R_n) - (1+R_0) \right]}{(1+R_0)}$$

D'où,

$$R_n^* \equiv \frac{\Delta S_n^*}{S_n^*(0)} = \frac{(R_n - R_0)}{(1+R_0)}$$ ce que l'on voulait démontrer.

<u>Définition:</u>
Supposons $V_0^* \neq 0$. Le taux de rendement exprimé en terme du numéraire d'un portefeuille H est donné par:

$$R^* \equiv \frac{V_1^* - V_0^*}{V_0^*}$$

où V_t^* est la valeur du portefeuille H à la date t exprimée en terme du numéraire.

<u>Proposition 27:</u>
Soit H un portefeuille tel que $V_0^* \neq 0$. Le taux de rendement du portefeuille est donné par :

$$R^* = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n R_n^*$$

où $\alpha_n = \frac{H_n S_n^*(0)}{V_0^*}$ n = 1, …, N.

α_n est le pourcentage de la valeur du portefeuille investi dans l'actif n. Notons que $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \neq 1$.

<u>Démonstration:</u>

<u>Proposition 28</u>:
Q est une mesure de probabilité corrigée du risque si et seulement si :

$$E_Q R_n^* = 0 \quad n = 1, \ldots, N$$

$$\forall \omega \in \Omega, Q(\omega) > 0$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$$

<u>Démonstration</u> :
Par définition, Q est une mesure de probabilité corrigée du risque si et seulement si :

- $\forall \omega \in \Omega,\ Q(\omega) > 0$
- $\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$
- $\forall n = 1, \ldots, N,\ E_Q \Delta S_n^* = 0$

Or, $E_Q \Delta S_n^* = E_Q S_n(0) \frac{(R_n - R_0)}{(1+R_0)} = S_n(0) E_Q \left(\frac{R_n - R_0}{1+R_0} \right)$

$E_Q \left(\frac{R_n - R_0}{1+R_0} \right) = 0$ car $S_n(0) > 0$.

Proposition 29:
Si l'actif sans risque est certain (rappelons que l'actif sans risque rapporte toujours quelque chose qui peut éventuellement varier suivant les états de la nature) Q est une mesure de probabilité corrigée du risque si et seulement si :

$$E_Q R_n = r \quad n = 1, \dots, N$$

$$\forall \omega \in \Omega, \ Q(\omega) > 0$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1$$

Démonstration :
D'après la proposition 28 Q est une mesure de probabilité risque-neutre si et seulement Q est une mesure de probabilité strictement positive telle que:

$$E_Q\left(\frac{R_n - R_0}{1 + R_0}\right) = 0 \quad n = 1, \dots, N$$

Si l'actif sans risque est déterministe alors:

$$E_Q\left(\frac{R_n - R_0}{1 + R_0}\right) = \frac{1}{(1 + R_0)} E_Q(R_n - R_0) = 0$$

$$E_Q(R_n - R_0) = 0$$

$E_Q(R_n) = r$ car R_0 est déterministe

Définition:

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. Soit $L(\omega) \equiv \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$ le vecteur de prix d'état.

On appelle prime de risque d'un actif la différence entre l'espérance mathématique du rendement d'un actif et le taux de rendement sans risque (le taux de rendement du compte bancaire lorsqu'il est déterministe). En quelque sorte c'est le taux de rendement supplémentaire que doit rapporter un actif risqué pour inciter des individus éprouvant de l'aversion au risque à le détenir.

Proposition 30:
Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. La prime de risque d'un actif est liée par la relation suivante à la covariance du rendement de cet actif et de la densité des prix d'état :

$$E_P R_n - r = -\operatorname{Cov}_P(R_n, L) \quad n = 1, \dots, N$$

Démonstration :

$$\mathrm{Cov}_P(R_n, L) = E_P(R_n \times L) - E_P(R_n) \times E_P(L)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) R_n(\omega) \times \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) - \left(\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) R_n(\omega) \right) \times \left(\underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right)}_{=1} \right)$$

$$= \underbrace{E_Q R_n}_{=r} - E_P R_n$$

D'où,

$$(E_P R_n - r) = -\mathrm{Cov}_P(R_n, L)$$

<u>Proposition 31 :</u>

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. Soit R le taux de rendement du portefeuille $H = (H_0, H_1, ..., H_N)$ et supposons $V_0 > 0$, on a

$$E_P R - r = -\mathrm{Cov}_P(R, L)$$

<u>Démonstration</u> :

$$\mathrm{Cov}_P(R, L) = E_P(R \times L) - E_P(R) \times E_P(L)$$

$$\mathrm{Cov}_P(R, L) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) R(\omega) \times \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) - \left(\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) R(\omega) \right) \times \left(\underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right)}_{=1} \right)$$

$$\mathrm{Cov}_P(R, L) = E_Q R - E_P R$$

$$E_Q R = \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) \left[\frac{H_0 B_0}{V_0} r + \sum_{n=1}^{N} \frac{H_n S_n(0)}{V_0} R_n(\omega) \right]$$

$$= \frac{H_0 B_0}{V_0} r \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega)}_{=1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{H_n S_n(0)}{V_0} \underbrace{\sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) R_n(\omega)}_{r}$$

$$E_Q R = r \underbrace{\left[\frac{H_0 B_0 + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(0)}{V_0} \right]}_{=1} = r$$

On a donc :

$$\mathrm{Cov}_P(R, L) = r - E_P R$$

<u>Proposition 32:</u>

Supposons qu'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage. Supposons que le droit conditionnel $a + bL$ $(b \neq 0)$ est généré par un portefeuille dont le taux de rendement est R' et supposons que le taux d'intérêt sans risque est déterministe. Soit R le taux de rendement d'un portefeuille quelconque. Alors :

$$\left(E_P R - r\right) = \frac{\mathrm{cov}_P\left(R, R'\right)}{\mathrm{var}_P R'}\left(E_P R' - r\right)$$

<u>Démonstration</u> :

Puisque $a + bL$ est réalisable, $\exists H' \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $V_1' = a + bL \ \left(b \neq 0\right)$.

Or $V_1' = \left(1 + R'\right)V_0' \ \left(\text{si } V_0' > 0\right)$.

$$\Leftrightarrow R' = \frac{a + bL}{V_0'} - 1$$

$$\mathrm{Cov}_P\left(R, R'\right) = \mathrm{Cov}_P\left(R, \frac{a + bL}{V_0'} - 1\right) = \mathrm{Cov}_P\left(R, \frac{b}{V_0'}L\right) = \frac{b}{V_0'}\mathrm{Cov}_P\left(R, L\right)$$

$$\mathrm{Cov}_P\left(R, L\right) = \frac{V_0'}{b}\mathrm{Cov}_P\left(R, R'\right)$$

On sait qu'on a pour tout portefeuille :

$$\begin{aligned} E_P R - r &= -\mathrm{Cov}_P\left(R, L\right) \\ &= -\frac{V_0'}{b}\mathrm{Cov}_P\left(R, R'\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

En particulier pour le portefeuille H' tel que le rendement est R'.

$$\begin{aligned} E_P R' - r &= -\frac{V_0'}{b}\mathrm{Cov}_P\left(R', R'\right) \\ &= -\frac{V_0'}{b}\mathrm{Var}_P R' \end{aligned} \qquad (2)$$

(1) / (2)
$$\frac{\left(E_P R - r\right)}{\left(E_P R' - r\right)} = \frac{-\frac{V_0'}{b}\mathrm{Cov}_P\left(R, R'\right)}{-\frac{V_0'}{b}\mathrm{Var}_P R'}$$

$$\left(E_P R - r\right) = \underbrace{\frac{\mathrm{Cov}_P\left(R, R'\right)}{\mathrm{Var}_P R'}}_{\text{beta du portefeuille H}}\left(E_P R' - r\right)$$

La prime de risque de H est proportionnelle à celle de H', le coefficient de proportionnalité étant égal au béta (cette formule est analogue à celle du CAPM où H' est remplacé par le portefeuille de marché).

<u>Remarque</u> : le droit conditionnel $a + bL \ \left(b \neq 0\right)$ est réalisable si et seulement si L est réalisable. En effet, si il existe H tel que :

$$V_1 = a + bL$$

alors $\left(H_0 B_0\left(1 + r\right) + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n\left(1\right)\right) = a + bL$

$$\frac{1}{b}\left(H_0 B_0 - \frac{a}{(1+r)}\right)(1+r) + \left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{b} H_n\right) S_n(1)\right) = L$$

On peut montrer également que :

$$E_P R^* = \frac{Cov_P\left(R^*, R'^*\right)}{var_P R'^*} E_P R'^*$$

$$\left(E_P R_n - r\right) = \frac{cov_P\left(R_n, R'\right)}{var_P R'}\left(E_P R' - r\right)$$
